Cours d'Analyse, Master 1

David Gérard-Varet

10 septembre 2020

Table des matières

Chapitre 1

Espaces de fonctions continues

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques.

1.1 Espaces $C(X, Y)$, $C_b(X, Y)$

Définition 1.1. (fonctions bornées) Une fonction $f : X \to Y$ est dite bornée si

$$\sup_{x,x' \in X} d_Y(f(x), f(x')) < +\infty$$

Définition 1.2. On note $B(X, Y)$ l'espace des fonctions bornées de X dans Y, $C(X, Y)$ l'espace des fonctions continues de X dans Y, et $C_b(X, Y)$ l'espace des fonctions continues et bornées de X dans Y.

Remarque 1.1. Si X est compact, $C(X, Y) = C_b(X, Y)$.

Proposition 1.1. *L'espace $B(X, Y)$ est un espace métrique, muni de*

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$$

L'espace $C_b(X, Y)$ est un sous-espace fermé de $B(X, Y)$.

Remarque 1.2. Si $d_\infty(f_n, f) \to 0$, on dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. Autrement dit, la convergence des suites dans $B(X, Y)$ est la convergence uniforme. Dire que $C_b(X, Y)$ est fermé dans $B(X, Y)$ revient à dire que la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.

Preuve. La première partie de la proposition est laissée en exercice. Pour la deuxième partie : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $C_b(X, Y)$, qui converge vers un élément f dans $B(X, Y)$. Montrons que f est continue en un point $x_0 \in X$ arbitraire. Soit $\varepsilon > 0$, et N tel que $d_\infty(f_N, f) \le \varepsilon$, c'est-à-dire

$$\forall x \in X, \quad d_Y(f_N(x), f(x)) \le \varepsilon.$$

Par continuité de f_N en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $d_X(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f_N(x_0), f_N(x)) \leq \varepsilon$. On en déduit par l'inégalité triangulaire que si $d_X(x_0, x) < \delta$,

$$\begin{aligned} d_Y(f(x_0), f(x)) &\leq d_Y(f(x_0), f_N(x_0)) + d_Y(f_N(x_0), f_N(x)) + d_Y(f_N(x), f(x)) \\ &\leq 2 \sup_{x' \in X} d_Y(f_N(x'), f(x')) + d_Y(f_N(x_0), f_N(x)) \leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.

Proposition 1.2. *Si Y est complet, l'espace $C_b(X, Y)$ est complet.*

Preuve. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $C_b(X, Y)$. Pour tout $x \in X$

$$d_Y(f_p(x), f_q(x)) \leq d_\infty(f_p, f_q) \to 0, \quad p, q \to +\infty$$

Ainsi, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de Y. Comme Y est complet, elle converge. On note $f(x)$ sa limite. Reste à montrer que f ainsi définie est dans $C_b(X, Y)$ et que $f_n \to f$ dans $C_b(X, Y)$, c'est-à-dire $d_\infty(f_n, f) \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N > 0$ tel que pour tous $p, q \geq N$, $d_\infty(f_p, f_q) \leq \varepsilon$. En particulier, pour x arbitraire et fixé, on a pour tout $n \geq N$, pour tout $q \geq N$ $d_Y(f_n(x), f_q(x)) \leq \varepsilon$, et en faisant tendre q vers l'infini $d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$. On a montré en résumé :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \sup_{x \in X} d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \tag{1.1}$$

Il suffit pour conclure de montrer que f est bornée, la propriété (1.1) pouvant alors s'écrire $f_n \to f$ dans $B(X, Y)$, ce qui implique $f \in C_b(X, Y)$ car $C_b(X, Y)$ est fermé (*cf.* Proposition 1.1). Mais en prenant $\varepsilon = 1$, $n = N$ dans (1.1), on a

$$\begin{aligned} \forall x, x' \in X, \quad d_Y(f(x), f(x')) &\leq d_Y(f(x), f_N(x)) + d_Y(f_N(x), f_N(x')) + d_Y(f_N(x'), f(x')) \\ &\leq 1 + \sup_{x, x' \in X} d_Y(f_N(x), f_N(x')) + 1 =: M < +\infty \end{aligned}$$

ce qui montre que f est bornée et conclut la preuve.

1.2 Fonctions uniformément continues

Soit $f : X \to Y$. On dit que f est uniformément continue sur X si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, x' \in D, \quad d_X(x, x') \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.3. *Si f est uniformément continue sur X, elle est continue sur X.*

Proposition 1.4. *Si f est uniformément continue sur X, et si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de X, alors $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de Y.*

Théorème 1.1. (Théorème de Heine) *Si X est compact, et f continue sur X, alors f est uniformément continue sur X.*

Preuve. Par continuité de f, pour tout $x \in X$, il existe δ_x tel que pour tout $x' \in B(x, \delta_x)$, $d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$. Les $B(x, \frac{\delta_x}{2})$, $x \in X$, forment un recouvrement ouvert de X, on peut donc par compacité de X en extraire un recouvrement fini : $X \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2})$. On pose $\delta := \min_i \delta_{x_i}$. Soit alors $x \in X$, et $x' \in B(x, \frac{\delta}{2})$. Soit $1 \leq i \leq n$ tel que $x \in B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2})$. Alors $x' \in B(x_i, \delta_{x_i})$. Ainsi, $d_Y(f(x), f(x_i)) \leq \varepsilon$, $d_Y(f(x'), f(x_i)) \leq \varepsilon$, et par inégalité triangulaire, $d_Y(f(x), f(x')) \leq 2\varepsilon$. Ainsi, f est uniformément continue.

Théorème 1.2. (Prolongement des applications uniformément continues) *Soit $D \subset X$ dense, et Y complet. Soit $f : D \to Y$ une application uniformément continue. Alors il existe un unique prolongement continu $\tilde{f} : X \to Y$ de f. De plus, $\tilde{f}$ est uniformément continue.*

Preuve.

Unicité du prolongement continu. Soient $\tilde{f}$ et $\bar{f}$ deux prolongements continus de f. L'ensemble $\{x \in X, \tilde{f}(x) = \bar{f}\} = (\tilde{f} - \bar{f})^{-1}\{0\}$ est un fermé qui contient D dense, donc égal à X. On a donc bien $\tilde{f} = \bar{f}$.

Existence d'un prolongement uniformément continu. Soit $x \in X$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de D convergeant vers X (une telle suite existe par densité de X). Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est une suite de Cauchy (d'élements de D), et comme f est uniformément continue sur D, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans Y, *cf.* Proposition 1.4. Comme Y est complet, elle converge. Montrons que la limite ne dépend que de x, et pas du choix de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x. Soit $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ une autre suite convergeant vers x. On veut montrer que $\lim_n f(x_n) = \lim_n f(x'_n)$. Pour cela, on introduit une troisième suite, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_{2n} = x_n$, $z_{2n+1} = x'_n$. Elle converge également vers x, et donc $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans Y pour les mêmes raisons. Mais $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ étant des sous-suites de cette suite convergente $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$, elles ont la même limite.

On peut donc poser, pour tout $x \in X$, $\tilde{f}(x) := \lim_n f(x_n)$, pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D qui converge vers x. Reste à montrer que $\tilde{f}$ convient. Pour $x \in D$, on peut prendre $x_n = x$ pour tout n, et donc $\tilde{f}(x) = \lim_n f(x_n) = f(x)$. On a bien un prolongement de f. Pour l'uniforme continuité de $\tilde{f}$: soit $\varepsilon > 0$, et $\delta < 0$ tels que pour tous $x, x' \in D$, $d_X(x, x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ (possible par uniforme continuité de f sur D. Soient maintenant $x, x' \in X$ tels que $d_X(x, x') < \delta$. Par densité de d, il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élements de D telles que $x_n \to x$, $x'_n \to x'$. Mais alors pour n assez grand, $d_X(x_n, x'_n) < \delta$, et donc $d_Y(f(x_n), f(x'_n)) < \varepsilon$. En faisant tendre n vers l'infini, on trouve $d_Y(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) < \varepsilon$, ce qui montre l'uniforme continuité de $\tilde{f}$.

1.3 Compacité et fonctions continues

Le point central de ce paragraphe est le théorème d'Arzela-Ascoli, qui donne des conditions suffisantes pour extraire d'une suite de fonctions continues sur un compact une sous-suite qui converge uniformément. Avant cela, on rappelle certaines propriétés des espaces compacts.

1.3.1 Quelques rappels sur les espaces compacts

Proposition 1.5. (Produit d'espaces métriques)
Soit (X_k, d_k), $k \in \mathbb{N}$, une famille dénombrable d'espaces métriques. Alors l'espace produit

$$X := \prod_{k\in\mathbb{N}} X_k := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, \quad x_k \in X_k \,\forall k\}$$

est un espace métrique, muni de

$$\mathbf{d}((x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (x'_k)_{k\in\mathbb{N}}) := \sup_{k\in\mathbb{N}} \min\left(2^{-k}, d_k(x_k, y_k)\right)$$

De plus, si $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de X, avec $x^n := (x^n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour tout n, et si $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X$, alors

$$\begin{aligned} &\lim_n x^n = x && \text{(c'est-à-dire } \lim_n \mathbf{d}(x^n, x) = 0\text{)} \\ \Leftrightarrow\ \forall k,\quad &\lim_n x^n_k = x_k && \text{(c'est-à-dire } \forall k,\quad \lim_n d_X(x^n_k, x_k) = 0) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Remarque 1.3. On aurait pu munir l'espace produit de distances différentes, par exemple

$$\tilde{\mathbf{d}}((x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (x'_k)_{k\in\mathbb{N}}) := \sup_{k\in\mathbb{N}} \min\left(\frac{1}{k}, d_k(x_k, y_k)\right),$$

ou encore

$$\bar{\mathbf{d}}((x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (x'_k)_{k\in\mathbb{N}}) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\min\left(1, d_k(x_k, y_k)\right)}{2^k}, \quad \ldots$$

Pour tous ces exemples, le critère (1.2) de convergence des suites reste inchangé.

Preuve. Il est facile de vérifier que pour tous $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $x' = (x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans X, $\tilde{\mathbf{d}}(x, x') = 0$ ssi $x = x'$ et $\tilde{\mathbf{d}}(x, x') = \tilde{\mathbf{d}}(x', x)$. Pour l'inégalité triangulaire, on introduit un autre élément $x'' = (x''_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans X. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Clairement, on a les inégalités :

$$\begin{aligned} \min(2^{-k}, d_k(x_k, x''_k)) &\le 2^{-k} \le 2^{-k} + d_k(x'_k, x''_k) \\ \min(2^{-k}, d_k(x_k, x''_k)) &\le 2^{-k} \le d_k(x_k, x'_k) + 2^{-k} \\ \min(2^{-k}, d_k(x_k, x''_k)) &\le 2^{-k} \le 2^{-k} + 2^{-k} \end{aligned}$$

et en utilisant l'inégalité triangulaire satisfaite par d_k,

$$\min(2^{-k}, d_k(x_k, x''_k)) \leq d_k(x_k, x''_k) \leq d_k(x_k, x'_k) + d_k(x'_k, x''_k)$$

Avec ces quatre inégalités, on a bien

$$\min(2^{-k}, d_k(x_k, x''_k)) \leq \min(2^{-k}, d_k(x_k, x'_k)) + \min(2^{-k}, d_k(x'_k, x''_k))$$

et par passage au sup en k

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(x, x'') = \sup_k \min(2^{-k}, d_k(x_k, x''_k)) &\leq \sup_k \Big(\min(2^{-k}, d_k(x_k, x'_k)) + \min(2^{-k}, d_k(x'_k, x''_k)) \Big) \\ &\leq \sup_k \min(2^{-k}, d_k(x_k, x'_k)) \ + \ \sup_k \min(2^{-k}, d_k(x'_k, x''_k)) = \mathbf{d}(x, x') + \mathbf{d}(x', x'')\end{aligned}$$

Reste à montrer (1.2). Supposons $\mathbf{d}(x^n, x) \to 0$. Alors, pour tout k,

$$\min(2^{-k}, d_k(x^n_k, x_k)) \leq \mathbf{d}(x^n, x) \to 0 \quad \text{quand } \ n \to +\infty$$

ce qui implique

$$d_k(x^n_k, x_k) \to 0 \quad \text{quand } \ n \to +\infty$$

Réciproquement, supposons que pour tout k, $x^n_k \to x_k$ quand $n \to +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, et k_0 fixé tel que $2^{-k_0} \leq \varepsilon$. Alors,

$$\sup_{k \geq k_0} \min(2^{-k}, d_k(x^n_k, x_k)) \leq \sup_{k \geq k_0} 2^{-k} \leq 2^{-k_0} \leq \varepsilon.$$

Par ailleurs, pour tout $k \leq k_0$, il existe N_k tel que pour tout $n \geq N_k$, $d_k(x^n_k, x_k) \leq \varepsilon$. En posant $N = \max(N_1, \ldots, N_{k_0})$, on a que pour tout $n \geq N$,

$$\sup_{k \leq k_0} \min(2^{-k}, d_k(x^n_k, x_k)) \leq \sup_{k \leq k_0} d_k(x^n_k, x_k) \leq \varepsilon$$

En combinant avec l'inégalité précédente, on trouve bien que pour tout $n \geq N$,

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \min(2^{-k}, d_k(x^n_k, x_k)) \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire $\mathbf{d}(x^n, x) \leq \varepsilon$.

Proposition 1.6. (produit d'espaces compacts)
Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille d'espaces métriques compacts. Alors $X = \prod_{k \in \mathbb{N}} X_k$ est compact.

Preuve. Elle repose sur le *procédé diagonal de Cantor*. On va appliquer le critère séquentiel de compacité à l'espace métrique X. Soit (x^n) une suite d'éléments de X. on veut en extraire une sous-suite qui converge. Pour tout n, $x^n = (x^n_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

La suite $(x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans X_1 compact, donc elle admet une sous-suite qui converge dans X_1. En notant $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'extractrice associée (application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) et x_1 la limite associée, on a

$$x_1^{\varphi_1(n)} \to x_1, \quad n \to +\infty$$

La suite $(x_2^{\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans X_2 compact, donc elle admet une sous-suite qui converge dans X_2. En notant $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'extractrice associée (application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) et x_2 la limite associée, on a

$$x_2^{\varphi_1\circ\varphi_2(n)} \to x_2, \quad n \to +\infty$$

N.B. Attention aux extractions successives : une sous-suite d'une sous-suite $u^{\varphi_1(n)}$ est de la forme $u^{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}$, pas $u^{\varphi_2\circ\varphi_1(n)}$.

En procédant récursivement, on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$ une extractrice φ_k et un élément x_k de X_k tels que

$$x_k^{\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_k(n)} \to x_k, \quad n \to +\infty$$

Nous allons montrer qu'il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, telle que

$$x_k^{\varphi(n)} \to x_k \quad \text{pour tout } \ k, \quad n \to +\infty$$

Pour cela, on pose

$$\varphi(n) := \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$$

On va montrer que φ est bien une extractrice, et que pour tout k, la suite $(\varphi(n))_{n\geq k}$ est une sous-suite de $(\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui donnera le résultat. D'abord, on note que toute extractrice $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, c'est-à-dire toute application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, satisfait $\psi(n') \geq n'$ pour tout n'. On en en déduit avec $\psi = \varphi_{n+1}$, n fixé, et $n' = n+1$ que $\varphi_{n+1}(n+1) \geq n+1$. Par suite, $\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n$ étant strictement croissante,

$$\begin{aligned}\varphi(n+1) = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n \circ \varphi_{n+1}(n+1) &\geq \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n+1) \\ &> \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n) = \varphi(n)\end{aligned}$$

ce qui montre que φ est une extractrice. Par ailleurs, pour tout k et tout $n \geq k$, $\varphi(n) = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_k(n')$, avec $n' = n$ si $n = k$, et $n' = \varphi_{k+1} \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$ si $n > k$, ce qui montre bien que $(\varphi(n))_{n\geq k}$ est une sous-suite de $(\varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$. En résumé, la sous-suite $(x^\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait

$$x_k^{\varphi(n)} \to x_k \quad \text{pour tout } \ k, \quad n \to +\infty$$

En posant $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, cela signifie que $x^{\varphi(n)} \to x$ dans X, d'après la Proposition 1.5.

On aura besoin dans un prochain chapitre d'une autre propriété liée à la notion de précompacité :

Définition 1.3. (espace précompact) Un espace métrique X est dit précompact si pour tout $\varepsilon > 0$, il peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε.

Proposition 1.7. *Un espace métrique est compact si et seulement si il est précompact et complet.*

Preuve. Le sens direct est facile et laissé au lecteur. Supposons réciproquement que X est précompact et complet. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. On va montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui est de Cauchy. Par complétude de X, cette sous-suite aura une limite, ce qui montrera la compacité de X. On va utiliser à nouveau un procédé diagonal.

Par précompacité, X peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon 1. En particulier, par le principe des tiroirs, une de ces boules contient une infinité d'éléments de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut en particulier extraire de cette infinité d'éléments une sous-suite $x^{\varphi_1(n)}$, qui vérifie donc

$$d_X(x^{\varphi_1(p)}, x^{\varphi_1(q)}) \leq 1, \quad \forall p, q.$$

Par précompacité, X peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{2}$. En particulier, par le principe des tiroirs, une de ces boules contient une infinité d'éléments de la suite $(x^{\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. On peut en particulier extraire de cette infinité d'éléments une sous-suite $x^{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}$, qui vérifie donc

$$d_X(x^{\varphi_1\circ\varphi_2(p)}, x^{\varphi_1\circ\varphi_2(q)}) \leq \frac{1}{2}, \quad \forall p, q.$$

En procédant récursivement, on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$ une extractrice $\varphi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$d_X(x^{\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_k(p)}, x^{\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_k(q)}) \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall p, q.$$

On procède alors comme dans la preuve de la Proposition 1.6 : en posant

$$\varphi(n) := \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$$

on obtient une extractrice telle que pour tout k et tous $p, q \geq k$

$$d_X(x^{\varphi(p)}, x^{\varphi(q)}) \leq \frac{1}{2^k}$$

ce qui montre que $(x^{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Corollaire 1.1. *Soit X un espace complet, $A \subset X$. A est relativement compact si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_1, \ldots, x_n$ points de A tels que $A \subset \cup_i B(x_i, \varepsilon)$.*

Preuve. Supposons A relativement compact, c'est-à-dire $\overline{A}$ compact. Pour tout $\varepsilon > 0$, les boules $B(x, \varepsilon)$, $x \in A$, forment un recouvrement ouvert de $\overline{A}$, dont on peut extraire un recouvrement fini. Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x_1, \ldots, x_n \in A$ tels que $A \subset \cup_i B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$, ce qui implique que $\overline{A} \subset \cup_i \overline{B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})} \subset B(x_i, \varepsilon)$. On en déduit que $\overline{A}$ est précompact, et complet (comme fermé d'un espace complet), donc compact par la proposition précédente.

On conclut ce paragraphe avec la notion de séparabilité.

Définition 1.4. (Espace séparable)
On dit qu'un espace métrique X est séparable s'il admet une partie dénombrable dense.

Proposition 1.8. *Un espace compact est séparable*

Preuve. Par compacité, pour tout k, il existe un recouvrement fini de X par des boules de rayon $\frac{1}{k}$: $X \subset \sup_{i=1}^{n_k} B(x_i^k, \frac{1}{k})$. On vérifie facilement que $\{x_i^k,\ k \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n_k\}$ est un ensemble dénombrable est dense.

1.3.2 Le théorème d'Ascoli

Nous allons nous intéresser ici aux parties relativement compactes de $C(X,Y)$ où X **est supposé compact** (de sorte que $C(X,Y) = C_b(X,Y)$ est un espace métrique, muni de d_∞). La caractérisation de ces parties relativement compactes repose sur la notion d'équicontinuité.

Définition 1.5. Soit $H \subset C(X,Y)$, $x_0 \in X$. On dit que H est équicontinu en x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : pour tout $f \in H$, pour tout $x \in X$, $d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.
On dit que la partie H est équicontinue sur X si elle est équicontinue en tout point de X.

Remarque 1.4. Le point important dans la définition est que le paramètre δ associé à ε est indépendant du choix de la fonction f dans H.

Exemple 1.1. Soit $K > 0$ fixé. On dit que $f : X \to Y$ est K-lipschitzienne si pour tous $x, x' \in X$,

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq K d_X(x, x').$$

Une fonction K-lipschitzienne est uniformément continue, et donc continue. Soit

$$Lip_K := \{f : X \to Y,\ f\ K-\text{Lipschitzienne}\} \subset C(X,Y).$$

Alors Lip_K est équicontinu sur X : il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ dans la définition de l'équicontinuité.

Exemple 1.2. On définit pour tout $n \geq 1$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n}x^n$. Alors

$$H := \{f_n, n \in \mathbb{N}^*\}$$

est équicontinue sur $[0,1]$. Pour le prouver, on remarque que par l'inégalité des accroissements finis, on a pour tout n, pour tous $x, x' \in [0,1]$,

$$|f_n(x) - f_n(x')| \leq (\sup_{[0,1]} |f_n'|)\,|x - x'| \leq (\sup_{z \in [0,1]} z^{n-1})\,|x - x'| \leq |x - x'|.$$

Ainsi H est un sous-ensemble de l'ensemble des fonctions 1-Lipschitziennes sur $[0,1]$, qui est équicontinu sur $[0,1]$ par l'exemple précédent. Donc H est équicontinu sur $[0,1]$ (tout sous-ensemble d'un ensemble équicontinu est trivialement équicontinu).

Exemple 1.3. On définit pour tout $n \geq 1$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Alors $H := \{f_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est pas équicontinu en 1. En effet, supposons par l'absurde que pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout n, pour tout $x \in [0,1]$, $|x-1| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - 1| \leq \varepsilon$. Par l'égalité des accroissements finis, on a pour un $z \in [x,1]$ $|f_n(x) - 1| = f_n'(z)|x-1| \geq nx^{n-1}(1-x)$. En prenant $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, on a pour n assez large $|x_n - 1| \leq \delta$, mais

$$|f_n(x_n) - 1| \geq nx_n^{n-1}(1-x_n) = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{n-1} \to e^{-1}, \quad n \to +\infty$$

On aboutit à une contradiction en prenant $\varepsilon < e^{-1}$.

Théorème 1.3. (Théorème d'Arzela-Ascoli)
Soit X un espace métrique compact, Y un espace métrique, $H \subset C(X,Y)$. Alors H est une partie relativement compacte de $C(X,Y)$ (i.e. $\overline{H}$ compact) sous les deux conditions suivantes :

i) Pour tout $x \in X$, $\{f(x), f \in H\}$ est relativement compact dans Y.

ii) H est équicontinu sur X.

l

Remarque 1.5. Lorsque $Y = \mathbb{R}^n$, ou plus généralement lorsqu'Y est un ev de dimension finie, la condition i) revient à : pour tout $x \in X$, $\{f(x), f \in H\}$ est borné.

Remarque 1.6. On peut montrer que les conditions i) et i), suffisantes d'après le théorème d'Ascoli pour avoir relative compacité de H, sont aussi nécessaires.

Preuve. On va utiliser le critère séquentiel. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de $\overline{H}$. Il suffit de montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $C(X,Y)$. Par définition de $\overline{H}$, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H telle que

$$d_\infty(f_n, g_n) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Si on montre que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente $(g_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ dans $C(X,Y)$, alors par l'inégalité précédente, $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également, vers la même limite. Autrement dit, on peut toujours se ramener au cas où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de H, ce que l'on supposera désormais.

Comme X est compact, il est séparable, voir Proposition 1.8. Soit $D := \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ une partie dénombrable dense. par l'hypothèse i), l'ensemble $\{f_n(x_1), n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans Y, donc il existe une extractrice $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(f_{\varphi_1(n)}(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Toujours par l'hypothèse i), l'ensemble $\{f_{\varphi_1(n)}(x_2), n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans Y, donc il existe une extractrice $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(f_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}(x_2))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Récursivement, il existe pour tout k une extractrice φ_k telle que $(f_{\varphi_1 \circ \ldots \varphi_k(n)}(x_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Par ce procédé diagonal de Cantor, on aboutit comme dans la preuve de la Proposition 1.6 à l'existence d'une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$f_{\varphi(n)}(x_k) \quad \text{converge quand } n \to +\infty, \text{ pour tout } k.$$

Montrons maintenant que pour tout $x \in X$, la suite $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Par le paragraphe précédent, c'est vrai pour tout $x \in D$. Par ii), $\{f_{\varphi(n)}, n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinu sur X. Par une adaptation immédiate du théorème de Heine, X étant compact, on en déduit que $\{f_{\varphi(n)}, n \in \mathbb{N}\}$ est uniformément équicontinu sur X : c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que

$$\forall n, \quad \forall x, x' \in X, \quad d_X(x, x') \leq \delta \Rightarrow d_Y(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(n)}(x')) \leq \varepsilon \tag{1.3}$$

Soit donc $\varepsilon > 0$, et $\delta > 0$ associé. Par densité de D dans X, pour tout $x \in X$, il existe $x' \in D$ tel que $d_X(x, x') \leq \delta$. Comme $(f_{\varphi(n)}(x'))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle est de Cauchy, il existe donc N tel que pour tous $p, q \geq N$, $d_Y(f_{\varphi(p)}(x'), f_{\varphi(q)}(x')) \leq \varepsilon$. On en déduit

$$\begin{aligned} d_Y(f_{\varphi(p)}(x), f_{\varphi(q)}(x)) &\leq d_Y(f_{\varphi(p)}(x), f_{\varphi(p)}(x')) + d_Y(f_{\varphi(p)}(x'), f_{\varphi(q)}(x')) + d_Y(f_{\varphi(q)}(x'), f_{\varphi(q)}(x)) \\ &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans Y. Mais par l'hypothèse i), elle admet une sous-suite convergente. On en conclut que toute la suite converge, et on note $f(x)$ sa limite. Par ailleurs, en faisant tendre n vers l'infini dans l'inégalité (1.3), on trouve

$$\forall x, x' \in X, \quad d_X(x, x') \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq \varepsilon \tag{1.4}$$

ce qui montre l'uniforme continuité de f.

Reste à montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $x \in X$, pour tout $n \geq N$,

$$d_Y(f_{\varphi(n)}(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

Soit donc $\varepsilon > 0$, et $\delta > 0$ associé par la propriété d'uniforme équicontinuité (1.3). On peut recouvrir X compact par une union finie de boules de rayon δ : $X \subset \cup_{i=1}^N B(x_i, \delta)$. Pour chaque i, par convergence au point x_i, il existe $N_i \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_i$,

$$d_Y(f_{\varphi(n)}(x_i), f(x_i)) \leq \varepsilon$$

Soit $N := \max N_i$. Pour tout $x \in X$, il existe i_0 tel que $d(x, x_{i_0}) < \delta$. On a alors pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned} d_Y(f_{\varphi(n)}(x), f(x)) &\leq d_Y(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(n)}(x_{i_0})) + d_Y(f_{\varphi(n)}(x_{i_0}), f(x_{i_0})) + d_Y(f(x_{i_0}), f(x)) \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

où on utilise (1.3) et (1.4) pour borner les premier et dernier terme, et la définition de N pour borner le second terme. Cela conclut la preuve du théorème.

1.4 Théorème de Stone-Weierstrass

On s'intéresse maintenant aux parties denses dans l'espace vectoriel $C(X, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, avec X métrique compact. Pour cela, on a besoin de définitions préliminaires.

Définition 1.6. Une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C(X, \mathbb{K})$ stable par produit.

Définition 1.7. Une partie H de $C(X, \mathbb{K})$ sépare les points si pour tous $x \neq y \in X$, il existe $f \in H$ tel que $f(x) \neq f(y)$.

Les deux théorèmes au coeur de cette section sont

Théorème 1.4. (Stone-Weierstrass, cas réel) *Soit X métrique compact, A une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{R})$, contenant les fonctions constantes et séparant les points de X. Alors A est dense dans $C(X, \mathbb{R})$*

Théorème 1.5. (Stone-Weierstrass, cas complexe) *Soit X métrique compact, A une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{C})$, contenant les fonctions constantes et séparant les points de X. Si de plus A est stable par conjugaison complexe, alors A est dense dans $C(X, \mathbb{C})$.*

Avant de passer à la preuve de ces théorèmes, on peut en énoncer un certain nombre de corollaires.

Corollaire 1.2. (Théorème de Weierstrass) *Soit $f \in C([a, b], \mathbb{K})$, avec $a < b$ deux réels. Alors il existe une suite de polynomes P_n qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.*

Corollaire 1.3. (Théorème de Weierstrass trigonométrique) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique Alors il existe une suite de polynomes trigonométriques T_n qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

On rappelle qu'un polynôme trigonométrique est une fonction de la forme

$$T(\theta) := \sum_{k=-K}^{K} a_k e^{ik\theta}, \quad K \in \mathbb{N}$$

Le corollaire précédent se déduit du Théorème 1.5 en identifiant les fonctions continues 2π périodiques à des fonctions continues sur $\mathbb{S}^1$, via l'identification $F(e^{i\theta}) = f(\theta)$.

Corollaire 1.4. *Soit $a < b$ et $c < d$. Pour $\varphi \in C([a, b], \mathbb{K})$ et $\psi \in C([c, d], \mathbb{K})$, on note $\varphi \otimes \psi \in C([a, b] \times [c, d], \mathbb{K})$ la fonction définie par*

$$\varphi \otimes \psi(x, y) = \varphi(x)\psi(y).$$

(fonction à variables séparées). Alors l'espace

$$A := Vect\Big(\{\varphi \otimes \psi, \quad \varphi \in C([a, b], \mathbb{K}), \quad \psi \in C([c, d], \mathbb{K})\}\Big)$$

est dense dans $C([a, b] \times [c, d], \mathbb{K})$

La preuve des deux théorèmes nécessite un certain nombre de résultats préliminaires. Dans toute la suite, X est supposé compact.

Lemme 1.1. (Lemme de Dini) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de $C(X,\mathbb{R})$, i.e. $f_n \leq f_{n+1}$. Si la suite converge simplement vers une fonction f de $C(X,\mathbb{R})$, alors elle converge uniformément vers f.*

Preuve du lemme. Soit $\varepsilon > 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Omega_n := \{x \in X, \quad f_n(x) > f(x) - \varepsilon\}$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, les Ω_n, $n \in \mathbb{N}$, qui sont ouverts par continuité de f_n et f, forment un recouvrement de X. Par compacité, on peut en extraire un recouvrement fini Ω_{n_i}, $1 \leq i \leq I$. Soit $N := \max_i n_i$. Alors pour tout $x \in X$, il existe i tel que $x \in \Omega_i$, et par croissance des f_n, pour tout $n \geq N \leq n_i$,

$$f_n(x) \geq f_{n_i}(x) \geq f(x) - \varepsilon$$

Par ailleurs, $f(x) \geq f_n(x)$ pour tout n, x par croissance des f_n. La convergence uniforme s'en déduit.

Corollaire 1.5. *Il existe une suite de polynomes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $[-1,1]$ vers $t \to |t|$.*

Preuve du corollaire. On pose $P_0 = 0$ et $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_n(x)^2)$. Vérifions par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq |x|.$$

C'est clair pour $n = 0$. Supposons la propriété vraie au rang n. Alors pour tout $x \in [-1,1]$, clairement, $P_{n+2}(x) = P_{n+1}(x) + \frac{1}{2}(x^2 - P_{n+1}(x)^2) \geq P_{n+1}(x)$, et par ailleurs

$$P_{n+2}(x) = |x| - (|x| - P_{n+1}(x))\Big(1 - \frac{1}{2}(|x| + P_{n+1}(x))\Big) \leq |x|$$

En particulier, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et bornée par 1, donc elle converge simplement, et par le lemme de Dini, uniformément. Soit f sa limite. En passant à la limite dans la relation de récurrence qui définit les P_n, on trouve $f(x)^2 = x^2$, et donc $f(x) = |x|$.

Lemme 1.2. *On suppose que X contient au moins deux éléments. Soit H une partie de $C(X,\mathbb{R})$ vérifiant les deux conditions suivantes :*

i) Pour tous $f, g \in H$, $\sup(f,g) \in H$ et $\inf(f,g) \in H$.

ii) Si x_1 et x_2 sont deux points distincts quelconques de X et si α_1 et α_2 sont deux nombres réels, il existe $f \in H$ tel que $f(x_1) = \alpha_1$ et $f(x_2) = \alpha_2$.

Alors H est dense dans $C(X,\mathbb{R})$.

Preuve du lemme. Soit $f \in C(X,\mathbb{R})$, et $\varepsilon > 0$. Soit $x \in X$. Par ii), pour tout $y \neq x$, il existe $f_y \in H$ tel que $f_y(x) = f(x)$ et $f_y(y) = f(y)$. Soit $O_y := \{x' \in X, \quad f_y(x') > f(x') - \varepsilon\}$. Pour tout $y \in X$, O_y est un ouvert qui contient x et y, donc $X = \cup_{y\neq x} O_y$. On peut extraire un recouvrement fini $O_{y_1}, \ldots, O_{y_n}$, avec $y_i \neq x$ pour tout i. On pose alors $g_x = \sup(f_{y_1}, \ldots f_{y_n})$. On a $g_x \in H$ par i). On a :

$$g_x(x) = f(x), \quad \text{et} \quad \forall x' \in X, \quad g_x(x') > f(x') - \varepsilon. \tag{1.5}$$

On pose ensuite pour tout $x \in X$, $U_x := \{x' \in X, \quad g_x(x') < f(x') + \varepsilon\}$. Comme U_x contient x, les U_x, $x \in X$, forment un recouvrement ouvert de X dont on peut extraire un recouvrement fini : $U_{x_1}, \ldots, U_{x_m}$. On pose finalement $g := \inf(g_{x_1}, \ldots, g_{x_m})$. On a vu en (1.5) que pour tout x, $g_x(x') > f(x') - \varepsilon$ pour tout x', ce qui implique $g(x') > f(x') - \varepsilon$ pour tout $x' \in X$. Par ailleurs, par définition des U_{x_i},

$$\forall x' \in X, \quad g(x') < f(x') + \varepsilon.$$

En combinant les deux inégalités, on aboutit à ce que $d_\infty(f, g) \leq \varepsilon$, ce qui montre la densité de H dans $C(X, \mathbb{R})$.

Lemme 1.3. *Soit H un sous-espace vectoriel de $C(X, \mathbb{R})$ qui sépare les points, contient les fonctions constantes, et tel que*

$$\forall f \in H, \quad |f| \in H$$

Alors H est dense dans $C(X, \mathbb{R})$.

Preuve du lemme. Si X a un seul élément, le résultat est clair. Sinon, on cherche à se ramener aux hypothèses du Lemme 1.2. Grâce aux formules,

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(|f - g| + f + g), \quad \inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

la condition i) du lemme est satisfaite. Pour ii), soient $x_1 \neq x_2$ dans X, et α_1, α_2 deux réels. Comme H sépare les points, il existe $g \in H$ tel que $g(x_1) \neq g(x_2)$. On cherche alors f sous la forme $f = a + bh$, $a, b \in \mathbb{R}$. Les conditions $f(x_1) = \alpha_1$ et $f(x_2) = \alpha_2$ sont équivalentes au système :

$$a + bh(x_1) = \alpha_1, \quad a + bh(x_2) = \alpha_2$$

qui est inversible.

Preuve du Théorème 1.4. On peut montrer facilement que si A est une sous-algèbre contenant les fonctions constantes et séparant les points, alors $\overline{A}$ l'est aussi. Par le lemme 1.3, il suffit alors de montrer que $\overline{A}$ vérifie la propriété : $f \in \overline{A} \Rightarrow |f| \in \overline{A}$. Cela impliquera $\overline{A}$ dense dans $C(X, \mathbb{R})$, ce qui revient à $\overline{A} = C(X, \mathbb{R})$. Si $f = 0$, c'est évident. Sinon, quitte à considérer $f/(\sup |f|)$ on peut supposer $|f| \leq 1$. On utilise alors le Corollaire 1.5. Si P_n est une suite de polynômes qui converge uniformément vers $t \to |t|$ sur , alors $P_n(f)$ converge uniformément vers $|f|$ (exercice). Or comme $\overline{A}$ est une sous-algèbre qui contient les constantes, $P_n(f) \in \overline{A}$ pour tout n, et comme $\overline{A}$ est fermé, sa limite $|f|$ appartient à $\overline{A}$, ce qui conclut la preuve.

Preuve du Théorème 1.5. On note $\mathcal{R}e\,(A) := \{\mathcal{R}e\, f, \quad f \in A\}$. On a $\mathcal{R}e\,(A) = A \cap C(X, \mathbb{R})$, en remarquant que pour $f \in A$, $\mathcal{R}e\, f = \frac{1}{2}(f + \overline{f}) \in A$. On en déduit que $\mathcal{R}e\,(A)$ est une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{R})$ qui contient les constantes. Montrons qu'elle sépare les points. Soit $x \neq y$, et $f \in A$ tel que $f(x) \neq f(y)$. Alors soit $\mathcal{R}e\, f(x) \neq \mathcal{R}e\, f(y)$, soit $\mathcal{R}e\,(if)(x) \neq \mathcal{R}e\,(if)(y)$, ce qui montre le résultat. Par le Théorème 1.4, on en déduit que $\mathcal{R}e\, A$ est dense dans $C(X, \mathbb{R})$. Soit maintenant $g \in C(X, \mathbb{C})$, $\varepsilon > 0$. Il existe $f_1, f_2 \in \mathcal{R}e\, A = A \cap C(X, \mathbb{R})$ tels que $d_\infty(f_1, \mathcal{R}e\, g) \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ et $d_\infty(f_2, \mathcal{R}e\,(-ig)) \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. En posant $f = f_1 + if_2$, on en déduit $f \in A$, et $d_\infty(f, g) \leq \varepsilon$.

Chapitre 2

Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E, F sont des $\mathbb{K}$-ev.

2.1 Normes

Définition 2.1. Une norme sur E est une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie trois propriétés :

i) *caractère défini* :
$\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

ii) *homogénéité* :
Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

iii) *inégalité triangulaire* :
Pour tous $x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

On dit alors que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé (evn).

Exemple 2.1. Sur $E = \mathbb{K}^d$, pour tout $p \in [1, +\infty[$, $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ définit une norme.

Exemple 2.2. Sur $E = \mathbb{K}^d$, $\|x\|_\infty := \sup_{1\leq i\leq d} |x_i|$ définit une norme.

Exemple 2.3. Sur $E = M_d(\mathbb{C})$, $\|A\| := \sqrt{\mathrm{tr}(A^*A)} = \sum_{1\leq i,j\leq d} |a_{i,j}|^2$ définit une norme.

Exemple 2.4. Si X est un espace métrique, sur $E = C_b(X, \mathbb{K})$, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$ définit une norme sur E.

Exemple 2.5. Si X est un espace métrique, sur $E = \mathbb{R}[X]$, $\|P\|_1 = \int_0^1 |P(x)|dx$ définit une norme sur E.

Remarque 2.1. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur E, $d(x, y) := ||x - y||$ est une distance sur E, qui permet d'appliquer à E toutes les notions vues dans le cadre des espaces métriques : boules ouvertes, fermées, ouverts, fermés, compacts, bornés, ...

Définition 2.2. (Normes équivalentes)
Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont dites équivalentes, ce que l'on note $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\forall x \in E, \quad \alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$$

Remarque 2.2. La notion de normes équivalentes définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes. Concrètement :

i) *réflexivité* :
Toute norme $\|\cdot\|$ sur E vérifie $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|$.

ii) *transitivité* :
Si $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ et si $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_3$, alors $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_3$.

ii) *symétrie* :
Si $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ alors $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_1$

Exemple 2.6. Nous verrons ci-dessous que si E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes. Cela est faux en dimension infinie. Par exemple, sur $E = \mathbb{R}[X]$, les normes

$$\|P\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| \quad \text{et} \quad \|P\|_1 := \int_0^1 |P(t)|dt$$

ne sont pas équivalentes. En effet, si on a pour un $\beta > 0$,

$$\|P\|_\infty \leq \beta\|P\|_1, \quad \forall P \in \mathbb{R}[X]$$

en testant cette inégalité avec $P(t) = P_n(t) := t^n$, on aboutit à :

$$1 \leq \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

contradiction.

Proposition 2.1. *Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur E sont équivalentes si et seulement si elles définissent les mêmes ouverts*

Preuve. Supposons les normes équivalentes. Par symétrie, il suffit de vérifier que tout ouvert de $(E, \|\cdot\|_1)$ est un ouvert de $(E, \|\cdot\|_2)$. Soit U un ouvert de $(E, \|\cdot\|_1)$, et $x \in U$. Il existe $r_1 > 0$ tel que $B_1(x, r_1) := \{y, \|y - x\|_1 < r_1\} \subset U$. Mais si $\|\cdot\|_1 \leq \beta\|\cdot\|_2$, et $r_2 := \frac{r_1}{\beta}$, on vérifie immédiatement que $B_2(x, r_2) := \{y, \|y - x\|_2 < r_2\} \subset B_1(x, r_1) \subset U$. Cela montre que U est un ouvert de $(E, \|\cdot\|_2)$.

Réciproquement, supposons que les normes définissent les mêmes ouverts. Alors, $U := \{x, \|x\|_1 < 1\}$ étant un ouvert de $(E, \|\cdot\|_1)$, c'est un ouvert de $(E, \|\cdot\|_2)$. En particulier, comme $0 \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B_2(0, r) := \{x, \|x\|_2 < r\} \subset U$. Autrement dit, on a pour tout $x \in E$, $\|x\|_2 < r \Rightarrow \|x\|_1 < 1$. Soit maintenant $y \in E \setminus \{0\}$. Alors $x := \frac{ry}{2\|y\|_1}$ vérifie $\|x\| = \frac{r}{2} < r$, et donc $\|x\|_2 < 1$. En revenant à y, on trouve

$$\frac{r}{2\|y\|_1}\|y\|_2 = \left\| r\frac{y}{2\|y\|_1} \right\|_2 < 1.$$

On a ainsi, en posant $\beta := \frac{2}{r}$, pour tout $y \in E$, $\|y\|_2 \leq \beta\|y\|_1$ (l'inégalité est évidente pour $y = 0$). En permutant les rôles de $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, on trouverait une inégalité de la forme opposée. Finalement, $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

Définition 2.3. (série normalement convergente)

Une série $\sum x_n$ d'éléments d'un evn E est dite normalement convergente si la série de réels positifs $\sum \|x_n\|$ est convergente.

Définition 2.4. (espace de Banach)

Un evn E est un espace de Banach s'il est complet (pour la distance naturellement associée à sa norme).

Exemple 2.7. Soit $1 \leq p \leq +\infty$, alors $E = \mathbb{K}^d$ muni de $\|\cdot\|_p$ est un evn complet. En effet, si $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E, pour tout $1 \leq i \leq d$, l'inégalité

$$|x_i^p - x_i^q| \leq \|x^p - x^q\|_p$$

montre que la suite $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Or $\mathbb{K}$ est complet. On rappelle que c'est une conséquence du théorème de Bolzano-Weierstrass : on utilise qu'une suite de Cauchy est bornée, qu'elle admet alors une valeur d'adhérence par le théorème Bolzano-Weierstrass, et finalement qu'une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge. Ainsi, les suites des coordonnées convergent, ce qui permet de conclure que la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et donc que E est complet.

Exemple 2.8. Si X est un espace métrique compact, et F est un espace de Banach, l'espace $C(X, F)$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ (*cf.* l'exemple 2.4) est un espace de Banach. Voir la Proposition 1.2.

Exemple 2.9. On verra au chapitre suivant que les espaces $l^p(\mathbb{N})$ et $L^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$ sont des espaces de Banach.

Proposition 2.2. *Dans un espace de Banach, toute série normalement convergente est convergente.*

Remarque 2.3. On peut même montrer qu'un evn est de Banach si et seulement si toute série normalement convergente d'éléments de E est convergente, mais la condition suffisante est plus anecdotique.

Preuve de la proposition. Soit E un espace de Banach, $\sum x_n$ une série d'éléments de E normalement convergente. Pour montrer que $\sum x_n$ est convergente, il suffit de montrer que la suite des sommes partielles $S_n := \sum_{k=0}^{n-1} x_k$, $n \in \mathbb{N}$, est de Cauchy. Or par inégalité triangulaire, pour tous $p < q$,

$$\|S_q - S_p\| = \|\sum_{k=p}^{q-1} x_k\| \leq \sum_{k=p}^{q-1} \|x_k\| \xrightarrow[p,q\to+\infty]{} 0$$

la dernière convergence venant du fait que $T_n := \sum_{k=0}^{n-1} \|x_k\|$ est de Cauchy (car convergente).

2.2 Cas de la dimension finie

Théorème 2.1. (Equivalence des normes en dimension finie) *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Remarque 2.4. On a vu que deux normes sont équivalentes si et seulement si elles définissent les mêmes ouverts. Ainsi, le théorème précédent montre qu'en dimension finie, toute notion topologique (c'est-à-dire reliée à la notion d'ouvert) sera indépendante du choix de la norme.

Preuve du théorème. Soit $d = \dim E$, et $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de E. Par la Remarque 2.2, il suffit de montrer que toute norme $\|\cdot\|$ sur E est équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$, définie par analogie avec $\mathbb{R}^d$ par

$$\|x\|_\infty := \sup_{1\le i\le d} |x_i|, \quad \text{avec } x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$$

(cette norme dépend bien sûr du choix de la base). Clairement, par inégalité triangulaire, pour tout $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i$,

$$\|x\| \le \sum_{i=1}^{d} |x_i|\, \|e_i\| \le \beta \|x\|_\infty, \quad \text{où on a posé } \beta := \max_{1\le i\le d} \|e_i\|.$$

Reste à montrer l'inégalité inverse. Pour cela, on considère $S := \{x \in E, \quad \|x\|_\infty = 1\}$. Montrons que S est un compact. Pour cela, on utilise le critère des suites. Soit $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de S. On a en particulier que pour tout $1 \le i \le d$, pour tout n, $|x_i^n| \le 1$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(x_1^{\varphi_1(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $x_1 \in \mathbb{K}$. Puis, il existe une extractrice $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(x_2^{\varphi_1\circ\varphi_2(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $x_2 \in \mathbb{K}$. Par extraction successive, on obtient finalement une extractrice $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \cdots \circ \varphi_d$ telle que pour tout $1 \le i \le d$,

$$x_i^{\varphi(n)} \to x_i, \quad n \to +\infty$$

En posant $x := \sum x_i e_i$, on a facilement que $\|x^{\varphi(n)} - x\|_\infty \to 0$. En particulier, $\|x\|_\infty = \lim_n \|x^{\varphi(n}\|_\infty = 1$. Ainsi S est compact.

Pour conclure, on introduit l'application

$$N : (S, \|\|_\infty) \to \mathbb{R}_+, \quad x \to \|x\|$$

(c'est la restriction de $\|\cdot\|$ à l'ensemble S. Par l'inégalité vue ci-dessus :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| \le \beta \|x\|_\infty,$$

on a facilement que N est continue. Comme S est compact, N atteint son inf : autrement dit, il existe $x_0 \in S$ tel que

$$||x||_\infty = 1 \quad \Rightarrow \|x\| \ge \|x_0\|$$

On pose $\alpha := \|x_0\| > 0$. Soit $x \in E$, $x \ne 0$. On pose $y := \frac{x}{\|x\|_\infty}$. On a alors $\|y\|_\infty = 1$, et donc $\|y\| \ge \alpha$. En revenant à x, on trouve $\|x\| \ge \alpha \|x\|_\infty$, cqfd.

On va maintenant énoncer quelques conséquences classiques de l'équivalence des normes.

Proposition 2.3. *Un evn de dimension finie est complet.*

Preuve. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Soit $d = \dim E$, et $(e_1, \dots, e_d)$ une base de E. On introduit

$$\|x\|_\infty := \sup_{1\le i\le d} |x_i|, \quad \text{avec } \; x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$$

Par le Théorème 2.1, les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes. On en déduit facilement qu'une suite est de Cauchy, resp. converge, pour la distance associée à $\|\cdot\|$ si et seulement si elle est de Cauchy, resp. converge, pour la distance associée à $\|\cdot\|_\infty$. Ainsi, il suffit de montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet. La preuve est alors analogue à ce qui a été vu dans l'exemple 2.7. On montre que si $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E, pour tout $1 \le i \le d$, la suite $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$, et donc converge vers un certain x_i. On en déduit que $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$.

Proposition 2.4. *Dans un evn de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées bornées.*

Preuve. On introduit comme dans la preuve précédente la norme $\|x\_\infty = \sup_{1\le i\le d} |x_i|$, $x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$. Par équivalence des normes, il suffit de montrer que dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, les parties compactes sont exactement les parties fermées bornées, *cf.* la Remarque 2.4. On le montre alors comme dans $(\mathbb{K}^d, \|\|_\infty)$, grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass.

Proposition 2.5. *Soit E un evn. Tout sev de dimension finie de E est fermé.*

Preuve. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, et F un sev de E de dimension finie. Par la Proposition 2.3, $(F, \|\cdot\|)$ est complet. Soit maintenant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F qui converge vers x dans E. On vérifie immédiatement que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, et donc par complétude de F, elle converge dans F. Cela montre que F est fermé dans E.

On conclut cette section par le

Théorème 2.2. (Théorème de Riesz) *La boule unité fermée d'un evn est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

Preuve. Si E est de dimension finie, la boule unité fermée de E étant fermée et bornée, elle est compacte, *cf.* Proposition 2.4. Réciproquement, supposons E de dimension infinie, et montrons que la boule unité fermée n'est pas compacte. Soit B_E la boule unité fermée, et S_E la sphère unité. Soit $x_0 \in S_E$, et supposons donnés pour $n \ge 1$, $x_0, \dots, x_{n-1} \in S_E$. On pose $F_n := \mathrm{Vect}(\{x_0, \dots, x_{n-1}\})$. Comme E est de dimension infinie, il existe $y_n \in E \setminus F$. D'après la Proposition précédente, F_n est fermé dans E. Soit $\delta_n := \mathrm{dist}(y_n, F_n) > 0$. Soit $z_n \in F_n$ tel que $\|z_n - y_n\| \le \frac{\delta_n}{2}$. On pose $x_n := \frac{y_n - z_n}{\|y_n - z_n\|}$. On a $x_n \in S_E$. De plus, pour $z \in F_n$,

$$x_n - z = \frac{1}{\|y_n - z_n\|}(y_n - (z_n + \|y_n - z_n\| z))$$

de sorte que

$$\|x_n - z\| \geq \frac{1}{\|y_n - z_n\|}\mathrm{dist}(y_n, F_n) \geq \frac{1}{2}$$

En particulier, $\|x_n - x_k\| \geq \frac{1}{2}$ pour tout $k \leq n-1$. On construit ainsi par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de S_E, donc de B_E telle que :

$$\forall p < q, \quad \|x_q - x_p\| \geq \frac{1}{2}.$$

En particulier, pour toute extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$\|x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n-1)}\| \geq \frac{1}{2}$$

ce qui montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente. Ainsi, B_E n'est pas compacte.

2.3 Applications linéaires continues

Théorème 2.3. (caractérisation des applications linéaires continues)

Soient E, F deux evn, et $T : E \to F$ une application linéaire. On a équivalence entre les propriétés suivantes :

i) f est continue en 0.
ii) f est continue.
iii) f est uniformément continue.
iv) f est lipschitzienne.
v) Il existe une constante $M > 0$ telle que $\|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ pour tout $x \in E$.

Preuve. On a clairement v) $\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i). Il suffit donc de montrer que i) $\Rightarrow$ v). Supposons donc f continue en 0. En prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition classique de la continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $\|y\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(y)\|_F \leq 1$. Soit maintenant $x \in E$, $x \neq 0$. On peut poser $y := \delta\frac{x}{\|x\|_E}$. On a alors $\|y\|_E = \delta$, et donc $\|f(y)\|_F \leq 1$. En revenant à x, en utilisant la linéarité de f, on trouve

$$\frac{\delta}{\|x\|_E}\|f(x)\|_Y \leq 1, \quad \text{c'est-à-dire } \|f(x)\|_Y \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_E.$$

En posant $M := \frac{1}{\delta}$, on retrouve v) (l'inégalité dans le cas $x = 0$ est triviale).

Définition 2.5. Pour E, F deux evn, on notera $L(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires **continues** de E dans F.

Définition 2.6. (formes linéaires continues, dual topologique) Les éléments de $L(E, \mathbb{K})$ sont appelés formes linéaires continues sur E, et $L(E, \mathbb{K})$, noté E', est appelé dual topologique de E.

Proposition 2.6. *Soit E un evn de dimension finie, F un evn. Toute application linéaire de $f : E \to F$ est continue.*

Preuve. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn, soit $d = \dim E$, et $(e_1, \dots, e_d)$ une base de E. On introduit

$$\|x\|_\infty := \sup_{1\le i\le d} |x_i|, \quad \text{avec } x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$$

Comme $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur E, il suffit de montrer que f est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$. Or pour tout $x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i$, on a

$$\|f(x)\|_F = \|f(\sum_i x_i e_i)\|_F \le \sum_i |x_i| \|f(e_i)\|_F \le M\|x\|_\infty, \quad \text{avec } M := \max_{1\le i\le d} \|f(e_i)\|_F.$$

On retrouve bien la caractérisation v) de la continuité de f, *cf.* Théorème 2.3.

Exemple 2.10. Contre-exemple si E est de dimension infinie : on pose $E = \mathbb{R}[X]$, muni de $\|P\| = \int_0^1 |P(t)|dt$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$, $P \to P(1)$. Clairement, f est linéaire. Montrons que f n'est pas continue. Dans le cas contraire, on aurait l'existence d'un $M > 0$ tel que pour tout $P \in E$, $|f(P)| \le M\|P\|_1$, c'est-à-dire :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad |P(1)| \le M \int_0^1 |P(t)|dt.$$

En prenant $P(t) = P_n(t) = t^n$, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \le \frac{M}{n+1}$, absurde.

Proposition 2.7. (norme d'application linéaire) *L'application $\|\cdot\|_{L(E,F)}$ définie pour tout $f \in L(E,F)$ par*

$$\|f\|_{L(E,F)} := \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$$

définit une norme sur $L(E,F)$. On a de plus les propriétés suivantes :

i)

$$\|f\|_{L(E,F)} = \sup_{x\ne 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

ii) Pour tout $f \in L(E,F)$ et pour tout $x \in E$,

$$\|f(x)\|_F \le \|f\|_{L(E,F)} \|x\|_E$$

iii) Pour tout $f \in L(E,F)$, pour tout $g \in L(F,G)$,

$$\|g \circ f\|_{L(E,G)} \le \|g\|_{L(F,G)} \|f\|_{L(E,F)}$$

Remarque 2.5. La norme $\|\cdot\|_{L(E,F)}$ est parfois appelée norme subordonnée aux normes sur E et F. On la note parfois $|||\cdot|||$ (*norme triple*).

Preuve de la proposition. Exercice !

Théorème 2.4. *Si F est un espace de Banach, l'espace $L(E,F)$, muni de $\|\cdot\|_{L(E,F)}$ est un espace de Banach.*

Preuve. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L(E,F)$. On a

$$\lim_{p,q\to+\infty} \|f_p - f_q\|_{L(E,F)} = 0.$$

Pour tout $x \in E$, par la proposition précédente

$$\|f_p(x) - f_q(x)\|_F \le \|f_p - f_q\|_{L(E,F)} \|x\|_E \tag{2.1}$$

ce qui montre que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de F. Comme F est complet, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F. On appelle $f(x)$ sa limite. Il reste à montrer que $f \in L(E,F)$, et que $\|f_n - f\|_{L(E,F)} \to 0$ quand $n \to +\infty$. En passant à la limite, pour $x, y \in E$ et $\lambda \in K$ fixés, dans la relation :

$$f_n(x + \lambda y) = f_n(x) + \lambda f_n(y)$$

on trouve

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

ce qui montre la linéarité de f. Par ailleurs, en passant à la limite, pour x fixé, dans la relation

$$\|f_n(x)\|_F \le M\|x\|_E, \quad \text{avec } M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L(E,F)}$$

on trouve

$$\|f(x)\|_F \le M\|x\|_E$$

ce qui montre que $f \in L(E,F)$. Enfin, soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que pour tous $p, q \ge N$, $\|f_p - f_q\|_{L(E,F)} \le \varepsilon$. Par l'inégalité (2.1), on a pour tout x fixé et pour tous $p, q \ge N$,

$$\|f_p(x) - f_q(x)\|_F \le \varepsilon\|x\|_E$$

En prenant $p = n$, et en envoyant q à l'infini, on trouve pour tout $n \ge N$.

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \le \varepsilon\|x\|_E$$

En particulier, x étant arbitraire, on en déduit

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|f_n(x) - f(x)\|_F}{\|x\|_E} \le \varepsilon, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \|f_n - f\|_{L(E,F)} \le \varepsilon.$$

Cela montre que $\|f_n - f\|_{L(E,F)} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Théorème 2.5. (Théorème de prolongement des applications linéaires continues)

Soit F un espace de Banach, D un sev d'un evn E, dense dans E. Soit $f \in L(D,F)$. Il existe un unique prolongement $\tilde{f} \in L(E,F)$ de f, avec $\|\tilde{f}\|_{L(E,F)} = \|f\|_{L(D,F)}$.

Preuve. Comme $f \in L(D,F)$, elle est uniformément continue sur D. On peut appliquer le Théorème 1.2 (prolongement des applications uniformément continues), qui fournit l'existence d'un unique prolongement $\tilde{f} : E \to F$ uniformément continu. Reste à voir que $\tilde{f} \in L(E,F)$, et que $\|\tilde{f}\|_{L(E,F)} = \|f\|_{L(D,F)}$. Pour la linéarité, on utilise que pour tout $\lambda \in K$, l'application

$$(x,y) \to \tilde{f}(x+\lambda y) - \tilde{f}(x) - \lambda \tilde{f}(y)$$

est continue sur $E \times E$ et nulle sur $D \times D$ (par linéarité de f). Elle est donc par densité nulle sur $E \times E$, ce qui montre la linéarité de $\tilde{f}$. Par ailleurs, soit $x \in E$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de D qui converge vers x. On a pour tout n,

$$\|\tilde{f}(x_n)\|_F = \|f(x_n)\|_F \leq \|f\|_{L(D,F)} ||x_n||_E.$$

En passant à la limite, on trouve

$$\|\tilde{f}(x)\|_F \leq \|f\|_{L(D,F)} ||x||_E$$

En divisant par $\|x\|_E$ et en prenant le sup sur les $x \neq 0$, on obtient que $\tilde{f} \in L(E,F)$, avec $\|\tilde{f}\|_{L(E,F)} \leq \|f\|_{L(D,F)}$. L'autre inégalité étant claire, on obtient le résultat voulu.

2.4 Théorème de Baire et conséquences

Théorème 2.6. (Théorème de Baire)
*Soit X un espace métrique complet, et $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts denses dans X. Alors $\cap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense dans X (*une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense*).*

*De manière équivalente : si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide (*une union de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide*).*

Preuve. Soit $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme dans l'énoncé. Soit $x \in X$, $\varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe un point de $\cap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ dans $B(x,\varepsilon)$. On construit par récurrence une suite d'éléments $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout n,

$$\overline{B(x_n,r_n)} \subset O_n \cap B(x_{n-1},r_{n-1}), \quad r_n < \frac{r_{n-1}}{2},$$

avec la convention $r_{-1} = \varepsilon$, $x_{-1} = x$. Pour l'initialisation, on utilise que O_0 est dense dans X : il existe $x_0 \in O_0 \cap B(x_0,\varepsilon)$. Comme $O_0 \cap B(x_0,\varepsilon)$ est ouvert, il existe $r_0 > 0$ tel que $\overline{B(x_0,r_0)} \subset O_0 \cap B(x_0,\varepsilon)$. De plus, on peut toujours supposer $r_0 < \frac{\varepsilon}{2}$. Supposons maintenant avoir construit $x_0,\ldots,x_{n-1}$. Comme O_n est dense dans X, il existe $x_n \in O_n \cap B(x_{n-1},r_{n-1})$. Comme $O_n \cap B(x_{n-1},r_{n-1})$ est ouvert, il existe $r_n > 0$ tel que $\overline{B(x_n,r_n)} \subset O_n \cap B(x_{n-1},r_{n-1})$. De plus, on peut toujours supposer $r_n < \frac{r_{n-1}}{2}$. Cela conclut la récurrence.

On a en particulier, pour tous $p \geq q$, $x_p \in B(x_q,r_q)$, et donc $d(x_p,x_q) \leq r_q \leq \frac{r_0}{2^q}$. On en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente vers un certain x dans X complet. On a pour tout $n \geq 1$, $x_n \in \overline{B(x_0, r_0)}$, et par passage à la limite, on a $x \in \overline{B(x_0, r_0)} \subset B(x_0, \varepsilon)$. De plus, pour tous $n' \geq n$, $x_{n'} \in \overline{B(x_n, r_n)}$, et donc par passage à la limite $n' \to +\infty$, $x \in \overline{B(x_n, r_n)} \subset O_n$. Ainsi $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} O_n$.

L'énoncé sur les fermés s'obtient par passage au complémentaire, en utilisant que A dense est équivalent à A^c d'intérieur vide : en effet, si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide, alors

$$(\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n)^c = \cap_{n\in\mathbb{N}} F_n^c$$

qui est l'intersection dénombrable des ouverts denses F_n^c. Par la preuve précédente, on en déduit que c'est une partie dense dans X, ce qui signifie que $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.

Corollaire 2.1. *Soit X un espace métrique complet (non-vide), tel que $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, avec $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de fermés. Alors l'un des F_n est d'intérieur non-vide.*

Théorème 2.7. (Théorème de Banach-Steinhaus) *Soit E un Banach, F un espace vectoriel normé, et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L(E,F)$. Si pour tout x,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n(x)||_F < \infty$$

alors

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n||_{L(E,F)} < \infty$$

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_n := \{x \in E, \quad \forall k,\ \|T_k(x)\|_F \leq n\}.$$

Il s'agit d'un fermé de E, et par l'hypothèse, $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n = E$. Par le corollaire du théorème de Baire, il existe N tel que F_N est d'intérieur non-vide. Ainsi, il existe $x_0 \in E$ et $\varepsilon > 0$ tels que $B(x_0, \varepsilon) \subset F_N$. Comme pour tout $y \in B(0,1)$, $x_0 + \frac{\varepsilon}{2} y \in B(x_0, \varepsilon)$, on a

$$\forall k, \quad \|T_k(x_0 + \frac{\varepsilon}{2} y)\|_F \leq N$$

ce qui donne

$$\forall k, \quad \|T_k(\frac{\varepsilon}{2} y)\|_F \leq N + \|T_k(x_0)\|_F.$$

Finalement

$$\forall k,\ \forall y \in B(0,1), \quad \|T_k(y)\|_F \leq \frac{2}{\varepsilon}(N + \|T_k(x_0)\|_F)$$

En prenant le sup en y, on arrive à

$$\forall k, \quad \|T_k\|_{L(E,F)} \leq M, \quad M := \frac{2}{\varepsilon}(N + \|T_k(x_0)\|_F).$$

ce qui conclut la preuve.

Corollaire 2.2. *Soit E un Banach, F un evn. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $L(E,F)$ qui converge simplement vers $T : E \to F$. Alors $T \in L(E,F)$, et $\|T\|_{L(E,F)} \leq \liminf_n \|T_n\|_{L(E,F)}$.*

Preuve. Comme pour tout x, $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on a en particulier que pour tout x, $\sup_n \|T_n(x)\|_F < +\infty$. Par le théorème de Banach-Steinhaus, $\sup_n \|T_n\|_{L(E,F)} := M < +\infty$. On en déduit que pour tout $x \in B(0,1)$.

$$\begin{aligned}\|T(x)\|_F = \lim_n \|T_n(x)\|_F = \liminf_n \|T_n(x)\|_F \leq \liminf_n \|T_n\|_{L(E,F)}||x||_E \\ \leq \liminf_n \|T_n\|_{L(E,F)} =: M' \leq M < +\infty\end{aligned}$$

En prenant le sup en $x \in B(0,1)$, on trouve bien $\|T\|_{L(E,F)} \leq M'$.

Théorème 2.8. (Théorème de l'application ouverte) *Soient E, F deux Banach. Soit $T \in L(E,F)$ surjective. Alors T est ouverte, c'est-à-dire que pour tout ouvert U de E, $T(U)$ est un ouvert de F.*

Preuve. Soit U un ouvert, $x_0 \in U$, et $\delta > 0$ tel que $B_E(x_0,\delta) \subset U$. Il suffit de montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $B_F(T(x_0),\rho) \subset T(B_E(x_0,\delta))$. Par linéarité de T, on peut se ramener à $x_0 = 0$, $\delta = 1$. Ainsi, il suffit de montrer qu'il existe $\rho > 0$ t.q. $B_F(0,\rho) \subset T(\underline{B_E(0,1)})$. On pose $B := B_E(0,1)$, $C := \overline{T(B)}$. On va d'abord montrer qu'il existe ρ tel que $\overline{B_F(0,\rho)} \subset C$. On a par surjectivité de T :

$$F = T(\cup_{n\in\mathbb{N}} nB) = \cup_{n\in\mathbb{N}} T(nB) = \cup_{n\in\mathbb{N}} nT(B) \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} nC$$

Notons que les nC, $n \in \mathbb{N}$, sont des fermés. Par le corollaire du théorème de Baire, il existe donc n_0 tel que n_0C soit d'intérieur non-vide, ce qui est équivalent à dire que C est d'intérieur non-vide. Ainsi, il existe $\rho > 0$ tel que $B_F(x_0,\rho) \subset C$. On vérifie facilement que $T(B)$ est symétrique (*i.e.* $x \in T(B) \Rightarrow -x \in T(B)$) et convexe. Ces propriétés étant préservées par passage à l'adhérence, C est aussi convexe et symétrique. Il contient ainsi $\frac{1}{2}\big(B_F(x_0,\rho)+B_F(-x_0,\rho)\big) := \{\frac{1}{2}(x+y), x \in B_F(x_0,\rho), y \in B_F(-x_0,\rho)\}$. On vérifie facilement que ce dernier ensemble contient $B(0,\rho)$. Quitte à réduire ρ, on peut supposer $\overline{B_F(0,\rho)} \subset C$

Montrons maintenant que $B_F(0,\rho/2) \subset T(B)$, avec le même ρ que précédemment. Soit $y \in B_F(0,\rho/2)$. On va construire par récurrence une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout n,

$$\|z_n\|_E < 2^{-(n+1)}, \quad \|y - T(z_0 + \cdots + z_n)\|_F < \rho 2^{-(n+2)}.$$

L'initialisation se fait comme suit. On a $2y \in B(0,\rho) \subset C$: en particulier, il existe $x_0 \in B_E(0,1)$ tel que $||2y - T(x_0)||_F < \rho/2$ (on pourrait prendre n'importe quel nombre positif à la place de $\rho/2$). En posant $z_0 = \frac{x_0}{2}$, on a $||z_0||_E < \frac{1}{2}$, $||y - T(z_0)||_F < \frac{\rho}{4}$. Supposons maintenant avoir construit $z_0,\ldots,z_n$. On a en particulier

$$\|2^{n+2}y - T(2^{n+2}z_0 + \cdots + 2^{n+2}z_n)\|_F < \rho.$$

Il existe $x_{n+1} \in B_E(0,1)$ tel que $\|2^{n+2}y - T(2^{n+2}z_0 + \cdots + 2^{n+2}z_n) - T(x_{n+1})\|_F < \frac{\rho}{2}$. En posant $z_{n+1} = 2^{-(n+2)}x_{n+1}$, on trouve le résultat voulu. La série $\sum z_k$ est normalement convergente, donc convergente car E est un Banach. Si x est sa limite, on trouve $T(x) = y$, et de plus

$$||x|| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} ||z_n|| < \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1,$$

ce qui conclut la preuve.

Corollaire 2.3. (Théorème de l'isomorphisme de Banach) *Soient E, F deux Banach, $T \in L(E,F)$ bijectif. Alors $T^{-1} \in L(F,E)$: T est un isomorphisme.*

Preuve. Le fait que l'inverse d'une application linéaire bijective soit linéaire est classique. Le point clé est montrer la continuité de T^{-1}, qui découle du théorème précédent et de la caractérisation de la continuité à l'aide des préimages d'ouverts : pour tout ouvert U de E, $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ est un ouvert de F.

Corollaire 2.4. *Soient $\| \|_1$ et $\| \|_2$ deux normes sur un espace E qui le rendent complets. S'il existe $M > 0$ tel que $\| \|_1 \leq M \| \|_2$, alors les deux normes sont équivalentes.*

Preuve. Appliquer le résultat précédent à l'application "identité" :

$$I : (E, \| \|_2) \to (E, \| \|_1), \quad x \to x.$$

On conclut cette série de théorèmes classiques par le

Corollaire 2.5. (Théorème du graphe fermé) *Soient E, F deux Banach, et $T : E \to F$ linéaire. Alors T est continue si et seulement si son graphe $G_T := \{(x, Tx), x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$.*

Preuve. Le sens qui est toujours vrai (pour E, F métriques quelconques, et $T : E \to F$ quelconque, pas forcément linéaire) est : si T continue alors G_T est fermé (exercice).

Le point important ici est la réciproque. Supposons G_T fermé. On introduit $N_T : E \to \mathbb{R}_+$, définie par : pour tout $x \in E$, $N_T(x) = \|x\|_E + \|T(x)\|_F$. On vérifie facilement que N_T est une norme, appelée norme du graphe. Montrons que (E, N_T) est complet : soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E pour N_T. On déduit immédiatement de la définition de N_T que (x_n) est de Cauchy dans $(E, \| \|_E)$ et que $(T(x_n))$ est de Cauchy dans $(F, \| \|_F)$. Ces espaces étant complets, il existe $(x,y) \in E \times F$ tel que $x_n \to x$, $T(x_n) \to y$. Mais comme G_T est fermé et que $(x_n, T(x_n)) \in G_T$ pour tout n, $(x,y) \in G_T$, *i.e.* $y = T(x)$. Finalement, on a $N_T(x_n - x) \to 0$, ce qui montre que (E, N_T) est complet. On est alors dans les conditions du théorème précédent : comme $\| \|_E \leq N_T$, les deux normes sont équivalentes : il existe en particulier $C > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad N_T(x) = \|x\|_E + \|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \text{d'où } \|T(x)\|_F \leq (C-1)\|x\|_E$$

ce qui montre la continuité de T.

2.5 Applications bilinéaires continues

On rappelle que si E, F sont deux espaces vectoriels normés,

$$\|(x,y)\|_{E\times F} := \|x\|_E + \|y\|_F.$$

fait de $E \times F$ un evn.

Remarque 2.6. On pourrait considérer d'autres normes sur $E \times F$, par exemple

$$\|(x,y)\| := \max(\|x\|_E, \|y\|_F) \quad \text{ou} \quad \|(x,y)\| := \sqrt{\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2},$$

qui sont équivalentes à la norme $\| \ \|_{E\times F}$ définie ci-dessus.

Définition 2.7. Soient E, F, G espaces vectoriels. On appelle application bilinéaire une application $\varphi : E \times F \to G$ telle que

— Pour tout $y \in F$, $x \to f(x,y)$ est linéaire de E dans G.
— Pour tout $x \in E$, $y \to f(x,y)$ est linéaire de F dans G.

Proposition 2.8. *Soient E, F, G evn, $\varphi : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

i) *φ est continue.*

ii) *φ est continue en $(0,0)$.*

iii) *Il existe $M > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in E \times F$,*

$$\|\varphi(x,y)\|_G \leq M\|x\|_E\|y\|_F$$

Proposition 2.9. *L'application*

$$\|\varphi\| := \sup_{\|(x,y)\|_{E\times F}\leq 1} \|\varphi(x,y)\|_G$$

est une norme sur l'espace vectoriel $B(E \times F, G)$ des applications bilinéaires continues de $E \times F$ dans G. De plus, si G est un Banach, $B(E \times F, G)$ muni de cette norme est un Banach.

Exemple 2.11. Soit E un evn. L'application $(\lambda, x) \to \lambda x$ est dans $B(\mathbb{K} \times E, E)$.

Exemple 2.12. Soient E, F, G trois evn. L'application $(g, f) \to g \circ f$ est une application bilinéaire continue de $L(F,G) \times L(E,F)$ dans $L(E,G)$.

Exemple 2.13. L'application $\langle\, , \rangle : (\varphi, x) \to \langle \varphi, x\rangle := \varphi(x)$ est une application bilinéaire continue de $E' \times E$ dans $\mathbb{K}$ (appelée crochet de dualité).

Remarque 2.7. Une application bilinéaire vérifie pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $(x,y) \in E \times F$:

$$\varphi(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 \varphi(x,y)$$

En particulier, elle n'est pas linéaire en le couple (x,y), sauf si c'est l'application nulle.

Chapitre 3

Espaces l^p et L^p

3.1 Espace $l^p(\mathbb{N})$

3.1.1 Définition, Propriétés de base

Définition 3.1. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note

$$l^p(\mathbb{N}) := \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p < +\infty\}$$

et

$$l^\infty(\mathbb{N}) := \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < +\infty\}$$

Proposition 3.1. (l^p est un Banach)

- *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $l^p(\mathbb{N})$ est un $\mathbb{C}$-ev.*
- *Pour tout $1 \leq p < \infty$,*

$$\|u\|_{l^p} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{1/p}$$

  définit une norme sur $l^p(\mathbb{N})$, et

$$\|u\|_{l^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

  définit une norme sur $l^\infty(\mathbb{N})$.
- *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $(l^p(\mathbb{N}), \| \|_{l^p})$ est un espace de Banach.*

Eléments de preuve. Nous nous limitons au cas p fini. Pour montrer que $l^p(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel, on applique l'inégalité de Minkowski aux sommes partielles pour montrer que pour tous $u, v \in l^p(\mathbb{N})$, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{n=0}^{N} |u_n + v_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=0}^{N} |u_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=0}^{N} |v_n|^p\right)^{1/p}$$

En faisant tendre N vers l'infini, on en déduit que $u+v \in l^p(\mathbb{N})$, et que $\| \, \|_{l^p}$ vérifie l'inégalité triangulaire
$$\|u+v\|_{l^p} \leq \|u\|_{l^p} + \|v\|_{l^p}$$
Le caractère défini et l'homogénéité de $\| \, \|_{l^p}$ sont immédiats, de sorte que $(l^p(\mathbb{N}), \| \, \|_{l^p})$ est un evn.

Pour la complétude, on procède comme suit. Soit $(u^j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $l^p(\mathbb{N})$. On rappelle qu'à j fixé, $u^j = (u^j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $l^p(\mathbb{N})$, en particulier une suite de complexes. Par définition d'une suite de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $J > 0$ tel que pour tous $j, k \geq J$,
$$\|u^j - u^k\|_{l^p} \leq \varepsilon, \quad i.e. \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u^j_n - u^k_n|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon.$$
On en déduit que pour tout n fixé, et pour tous $j, k \geq J$, $|u^j_n - u^k_n| \leq \varepsilon$, c'est-a-dire $(u^j_n)_{j\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy de $\mathbb{C}$. On en déduit que c'est une suite convergente, et one note $u_n \in \mathbb{C}$ sa limite. Reste ensuite à montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $l^p(\mathbb{N})$ et que $u^j \to u$ quand $j \to +\infty$ dans $l^p(\mathbb{N})$. Pour cela, on utilise que :
$$\forall j, k \geq J, \quad \forall N, \quad \left(\sum_{n=0}^{N} |u^j_n - u^k_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u^j_n - u^k_n|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon$$
En faisant tendre k vers l'infini dans la somme (finie) allant de 0 à N, on a :
$$\forall j \geq J, \quad \forall N, \quad \left(\sum_{n=0}^{N} |u^j_n - u_n|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon$$
ce qui montre par les résultats classiques sur les séries numériques que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u^j_n - u_n|^p$ converge, et que
$$\forall j \geq J, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u^j_n - u_n|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon$$
Le résultat s'en suit.

Proposition 3.2. (Inclusion des $l^p(\mathbb{N})$ entre eux)
Pour tous $p_1 \leq p_2$, $l^{p_1}(\mathbb{N}) \subset l^{p_2}(\mathbb{N})$ avec $\|u\|_{l^{p_2}} \leq \|u\|_{l^{p_1}}$ pour tout $u \in l^{p_1}(\mathbb{N})$.

Remarque 3.1. Astuce pour se souvenir du sens de l'inclusion : le terme général d'une série convergente est borné, donc $l^1 \subset l^\infty$.

Preuve. On montre directement l'inégalité. On considère le cas $p_2 < \infty$ pour alléger les notations, mais le cas $p_2 = \infty$ peut se traiter de la même façon. Soit $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes ≥ 0 telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 1$. On a en particulier $v_n \leq 1$ pour tout n, et donc pour tout $p \geq 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|^p \leq \sum v_n = 1$. Soit maintenant $u \in l^{p_1}(\mathbb{N})$. Si $u = 0$, l'inégalité est immédiate. Sinon, on applique le résultat précédent à

$$p := \frac{p_2}{p_1}, \quad v_n := |u_n|^{p_1} / \|u\|_{l^{p_1}}^{p_1}.$$

On trouve

$$\sum v_n^p \leq 1, \quad \text{ce qui s'écrit} \quad \|u\|_{l^{p_2}} \leq \|u\|_{l^{p_1}}.$$

Proposition 3.3. (séparabilité)
$l^p(\mathbb{N})$ est séparable si et seulement si p est fini.

Preuve. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on définit $\delta^j = (\delta^j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\delta^j_n := 1 \quad \text{si } n = j, \quad \delta^j_n := 0 \quad \text{sinon.}$$

Si p fini, on vérifie (exercice !) que l'ensemble des combinaisons linéaires des δ^j à coefficients dans $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q} := \{x + iy, x, y \in \mathbb{Q}\}$ est dénombrable et dense dans $l^p(\mathbb{N})$.

Reste à montrer que $l^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable. Pour cela, on utilise le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Soit E un evn, admettant une famille $(O_i)_{i\in I}$ non-dénombrable d'ouverts 2 à 2 disjoints. Alors E n'est pas séparable.*

Preuve du lemme. Supposons par l'absurde que E est séparable, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense dans E. Soit $i_0 \in I$. On pose alors

$$\phi : \mathbb{N} \to I, \quad n \to i_0 \quad \text{si } x_n \notin \cup_{i\in I} O_i\ , \quad n \to i \quad \text{si } x_n \in O_i.$$

Cette application est bien définie (car les O_i sont 2 à 2 disjoints) et surjective (par densité des x_n). Contradiction car I non-dénombrable.

Pour conclure à la non-séparabilité de $l^\infty(\mathbb{N})$, on applique ce lemme avec $I = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$, et $O_i := B(i, \frac{1}{4})$ pour $i \in I$, où $B(i, \frac{1}{4})$ désigne la boule ouverte de centre i et de rayon $\frac{1}{4}$ dans $l^\infty(\mathbb{N})$.

3.1.2 Dualité

Proposition 3.4. *Soit $1 \leq p \leq \infty$, et p' l'exposant conjugué : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors pour tout $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^{p'}(\mathbb{N})$, l'application*

$$\varphi_v : u \to \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

définit un élément de $\big(l^p(\mathbb{N})\big)'$. De plus,

$$\|\varphi_v\|_{\left(l^p(\mathbb{N})\right)'} = \|v\|_{l^{p'}}$$

Preuve. Pour alléger les notations, on traite seulement le cas $p < \infty$ et $p' < \infty$, autrement dit $1 < p < \infty$, mais les cas limites se montrent de la même façon. L'inégalité de Hölder classique montre que pour tout N,

$$\sum_{n=0}^{N} |u_n v_n| \le \Big(\sum_{n=0}^{N} |u_n|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{n=0}^{N} |v_n|^{p'}\Big)^{1/p'} \le \|u\|_{l^p} \|v\|_{l^{p'}}.$$

On en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n$ est absolument convergente dans $\mathbb{C}$, donc convergente : en particulier $\varphi_v(u)$ est bien défini, avec

$$|\varphi_v(u)| = |\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n| \le \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \le \|u\|_{l^p} \|v\|_{l^{p'}}.$$

On en déduit que φ_v (qui est clairement linéaire) est un élément de $(l^p(\mathbb{N}))'$, et que

$$\|\varphi_v\|_{\left(l^p(\mathbb{N})\right)'} \le \|v\|_{l^{p'}}.$$

Pour avoir l'égalité on considère la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n := \frac{|v_n|^{p'-2}\overline{v_n}}{\|v\|_{l^{p'}}^{p'-1}} \quad \text{si } v_n \neq 0, \quad u_n := 0 \quad \text{sinon.}$$

On vérifie (exercice !) que $u \in l^p(\mathbb{N})$, et que $|\varphi_v(u)| = \|v\|_{l^{p'}} \|u\|_{l^p}$.

La proposition précédente montre que pour tout $1 \le p \le \infty$, $l^{p'}(\mathbb{N})$ peut s'identifier à un sous-espace vectoriel de $\big(l^p(\mathbb{N})\big)'$. Plus précisément,

$$l^{p'}(\mathbb{N}) \approx I_p(l^{p'}(\mathbb{N})) \subset (l^p(\mathbb{N}))'$$

où

$$I_p : l^{p'}(\mathbb{N}) \to (l^p(\mathbb{N}))', \quad v \to \varphi_v$$

En fait, quand p est fini, l'application I_p est un isomorphisme, ce qui permet d'identifier $l^{p'}(\mathbb{N})$ à tout $(l^p(\mathbb{N}))'$. C'est le

Théorème 3.1. (dualité l^p-$l^{p'}$)
Soit $1 \le p < \infty$. Soit p' l'exposant conjugué. Alors le dual topologique de $l^p(\mathbb{N})$ s'identifie à $l^{p'}(\mathbb{N})$,

$$\big(l^p(\mathbb{N})\big)' \approx l^{p'}(\mathbb{N})$$

au sens précis suivant : l'application

$$I_p : l^{p'}(\mathbb{N}) \to (l^p(\mathbb{N}))', \quad v \to \varphi_v$$

est un isomorphisme (isométrique).

Remarque 3.2. Le théorème ci-dessus d'identification de $l^{p'}(\mathbb{N})$ et $\big(l^p(\mathbb{N})\big)'$ n'est valable que pour p fini. Dans le cas $p = \infty$, $l^1(\mathbb{N})$ s'identifie à un espace strictement plus petit que $\big(l^\infty(\mathbb{N})\big)'$. Voir par exemple le Chapitre 5, Remarque 5.3.

Preuve. Pour alléger les notations, on se restreint de nouveau au cas $p < \infty$, $p' < \infty$, autrement dit $1 < p < \infty$, mais le cas limite $p = 1$ se traite de la même façon. On a vu à la Proposition 3.4 que I_p est une isométrie linéaire. En particulier, elle est continue et injective. Il reste à montrer que I_p est surjective. Elle sera alors bijective, et donc un isomorphisme, par exemple par le théorème d'isomorphisme de Banach, *cf.* Corollaire 2.3. Soit $\varphi \in \big(l^p(\mathbb{N})\big)'$. On veut trouver $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\varphi = \varphi_v$. Soit $(\delta^j)_{j\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $l^p(\mathbb{N})$ définie par :

$$\delta^j_n := 1 \quad \text{si } n = j, \quad \delta^j_n := 0 \quad \text{sinon.}$$

Si un tel v existe, on a nécessairement $\varphi(\delta^j) = \varphi_v(\delta^j) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta^j_n v_n = v_j$ pour tout j. On définit donc v par

$$\forall n, \quad v_n := \varphi(\delta^n).$$

Il faut montrer que $v \in l^{p'}(\mathbb{N})$ et que $\varphi = \varphi_v$. Pour le premier point, on définit pour tout j la suite $w^j = (w^j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$w^j_n := |v_n|^{p'-2}\overline{v_n} \quad \text{si } v_n \neq 0 \text{ et } n \leq j, \quad w^j_n := 0 \quad \text{sinon.}$$

On a

$$\varphi(w^j) = \varphi(\sum_{n=0}^{j} w^j_n \delta^n) = \sum_{n=0}^{j} w^j_n \varphi(\delta^n) = \sum_{n=0}^{j} w^j_n v_n = \sum_{n=0}^{j} |v_n|^{p'}.$$

De plus,

$$\|w^j\|_{l^p} = \Big(\sum_{n=0}^{j} |v_n|^{p(p'-2)}|v_n|^p\Big)^{1/p} = \Big(\sum_{n=0}^{j} |v_n|^{p'}\Big)^{1/p}.$$

On en déduit :

$$\sum_{n=0}^{j} |v_n|^{p'} = \varphi(w^j) \leq \|\varphi\|_{\left(l^p(\mathbb{N})\right)'} \|w^j\|_{l^p} \leq \Big(\sum_{n=0}^{j} |v_n|^{p'}\Big)^{1/p}$$

ce qui donne

$$\Big(\sum_{n=0}^{j} |v_n|^{p'}\Big)^{1/(p')} \leq \|\varphi\|_{\left(l^p(\mathbb{N})\right)'}$$

En faisant tendre j vers l'infini, on voit que $v \in l^{p'}(\mathbb{N})$.

Reste à montrer que $\varphi = \varphi_v$. Par définition, ces deux formes linéaires continues coincident sur $\{\delta^j, j \in \mathbb{N}\}$, donc sur $\mathrm{Vect}\big(\delta^j, j \in \mathbb{N}\big)$. Or comme p est fini, $\mathrm{Vect}\big(\delta^j, j \in \mathbb{N}\big)$ est dense dans $l^p(\mathbb{N})$. On en déduit par continuité que $\varphi = \varphi_v$.

3.2 Espace $L^p(X)$

Nous supposons dans cette section une familiarité du lecteur avec la théorie de la mesure et l'intégrale de Lebesgue. Dans toute la section, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré, c'est-à-dire un ensemble X muni d'une σ-algèbre $\mathcal{A}$ et d'une mesure μ sur $\mathcal{A}$. Le lecteur mal à l'aise avec ce cadre général peut se restreindre au cas où X est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{A}$ la tribu borélienne, et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

La plupart des propriétés énoncées dans cette section ne feront pas l'objet de démonstrations. Notons que certaines de ces propriétés et leurs preuves sont très analogues à celles présentées à la section précédente sur les l^p. Nous renvoyons à [5] ou [2] pour un traitement complet.

3.2.1 Définition, Propriétés de base

Définition 3.2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.
Pour tout $1 \leq p < \infty$, on note

$$\mathcal{L}^p(X) := \{\ f : X \to \mathbb{C} \ \text{ mesurable et t.q. } \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$$

et

$$\mathcal{L}^\infty(X) := \{\ f : X \to \mathbb{C} \ \text{ mesurable et t.q. il existe } M, |f| \leq M \text{ presque partout}\}.$$

Finalement, on note pour tout $1 \leq p \leq \infty$:

$$L^p(X) := \text{ l'ensemble des classes d'équivalence de } \mathcal{L}^p(X) \\ \text{pour la relation d'équivalence } f \sim g \text{ si } f = g \text{ presque partout.}$$

Remarque 3.3. La définition de l'espace L^p peut paraître très abstraite : il s'agit d'un espace quotient, constitué des classes d'équivalences de la relation d'*égalité presque partout*. Ainsi,

$$L^p(X) = \{\overline{f}, \quad f \in \mathcal{L}^p(X)\},$$

où pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^p(X)$,

$$\overline{f} := \{g \in \mathcal{L}^p(X), \quad g = f \quad \text{ presque partout}\}.$$

L'ensemble $\overline{f}$ est appelé classe de f. Inversement, tout élément de $\overline{f}$ (dont f lui-même) est appelé représentant de la classe.

L^p a alors une structure d'espace vectoriel, muni des lois

$$\overline{f} + \overline{g} := \overline{f + g}, \quad \lambda\overline{f} := \overline{\lambda f}$$

(on doit vérifier au passage que ces définitions font sens, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas du choix des représentants dans la classe).

En pratique, on ne s'appesantit pas sur cette définition abstraite, et on identifie les classes d'équivalence $\overline{f}$ et leurs représentants f. On parle par abus de language de fonctions de L^p, de la convergence de suites de fonctions dans L^p, *etc.* Il faut juste garder en tête que l'on identifie les fonctions qui sont égales presque partout : en effet, dans la théorie de l'intégration, les ensembles de mesure nulle ne jouent pas de rôle.

Définition 3.3. Pour $1 \leq p < \infty$, on note

$$\forall f \in L^p(X), \quad \|f\|_{L^p} := \Big(\int_X |f|^p d\mu \Big)^{1/p}, \quad .$$

et

$$\forall f \in L^\infty(X), \quad \|f\|_{L^\infty} := \inf\{M, \quad |f| \leq M \quad \text{presque partout}\}.$$

Remarque 3.4. Soit $f \in L^\infty(X)$. Tout réel M tel que $|f| \leq M$ presque partout est appelé *majorant essentiel* de f. L'inf de ces majorants, $\|f\|_{L^\infty}$ est appelé *sup essentiel* de f. C'est le plus petit des majorants essentiels de f, comme le montre le raisonnement suivant. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de majorants essentiels qui converge vers $\|f\|_{L^\infty}$. Pour tout n, il existe A_n tel que $\mu(A_n) = 0$ et $|f(x)| \leq M_n$ pour tout $x \in A_n^c$. On pose $A = \cup_n A_n$. On a alors $\mu(A) \leq \sum_n \mu(A_n) = 0$, et pour tout $x \in A^c = \cap_n A_n^c$, $|f(x)| \leq M_n$ pour tout n. En passant à la limite on trouve $|f(x) \leq \|f\|_{L^\infty}$ pour tout $x \in A^c$, ce qui montre le résultat.

Proposition 3.5. (Inégalité de Hölder)
Soient $f \in L^p(X)$, $g \in L^{p'}(X)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors $fg \in L^1(X)$, et

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

Corollaire 3.1. (Inclusion des L^p entre eux en mesure finie)
Si $\mu(X) < \infty$, pour tous $p_1 \leq p_2$, $L^{p_2}(X) \subset L^{p_1}(X)$, avec

$$\|f\|_{L^{p_1}} \leq \mu(X)^{\frac{p_2-p_1}{p_1p_2}} \|f\|_{L^{p_2}}, \quad \forall f \in L^{p_2}(X)$$

Corollaire 3.2. *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $(L^p(X), \| \|_{L^p})$ est un evn. En particulier, on a l'inégalité de Minkowski :*

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}, \quad \forall f, g \in L^p(X).$$

Théorème 3.2. (Théorème de Riesz-Fischer)
Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(X)$ est un espace de Banach.

Proposition 3.6. *$L^2(X)$ est un espace de Hilbert, muni de*

$$(f|g) := \int_X f(x)\overline{g(x)} d\mu$$

3.2.2 Parties denses

Définition 3.4. (Fonction étagée)
$s : X \to \mathbb{C}$ est une fonction étagée si elle est de la forme $s = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i 1_{A_i}$, avec $N \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $A_i \in \mathcal{A}$ pour tout $0 \leq i \leq N$.

Théorème 3.3. *L'espace vectoriel des fonctions étagées est dense dans $L^\infty(X)$.*
L'espace vectoriel des fonctions étagées s telles que $\mu(\{s \neq 0\}) < +\infty$ est dense dans $L^p(X)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.

Preuve. Nous nous limitons au cas $p < \infty$. Soit $f \in L^p(X)$. Si $f \geq 0$, par des résultats classiques, il existe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions étagées telles que

$$0 \leq s_n \leq f, \quad s_n \to f \quad \text{presque partout.}$$

On a $\int_X |s_n|^p d\mu \leq \int_X |f|^p d\mu < +\infty$, d'où $\mu(\{s_n \neq 0\}) < +\infty$ pour tout n. De plus, la convergence simple et la domination $|f - s_n|^p \leq |2f|^p$ permettent d'appliquer le théorème de convergence dominée : $\int_X |f - s_n|^p \to 0$ quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire $\|f - s_n\|_{L^p} \to 0$.

Pour f arbitraire dans $L^p(X)$, on se ramène au cas ≥ 0 en décomposant :

$$f = (\mathcal{R}e\, f)_+ - (\mathcal{R}e\, f)_- + i\big((\mathcal{I}m\, f)_+ - (\mathcal{I}m\, f)_-\big)$$

Corollaire 3.3. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ (muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue). Pour tout $1 \leq p < \infty$, $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Esquisse de Preuve. Soit $1 \leq p < \infty$. Par densité des fonctions étagées, il suffit d'approcher dans L^p la fonction caractéristique 1_A d'un borélien $A \subset \Omega$ de mesure de Lebesgue finie. Pour cela, on utilise la régularité de la mesure μ de Lebesgue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe K compact et U ouvert tels que $K \subset A \subset U \subset \Omega$ tel que $\mu(U \setminus K) \leq \varepsilon$. Soit U' ouvert borné tel que $K \subset U' \subset \overline{U'} \subset U$. Comme K et $\mathbb{R}^d \setminus U'$ sont des fermés disjoints, par le lemme d'Urysohn, il existe $f : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ continue telle que $f = 1$ sur K et $f = 0$ sur $\mathbb{R}^d \setminus U'$. En particulier, le support de f est inclus dans $\overline{U'}$ donc compact. De plus, $f - 1_A = 0$ sur K et sur $\mathbb{R}^d \setminus U$. On en déduit

$$\int_X |f - 1_A|^p d\mu \leq \mu(U \setminus K) \leq \varepsilon$$

ce qui permet de conclure.

Corollaire 3.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ (muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue). L'espace $L^p(\Omega)$ est séparable si et seulement si $1 \leq p < \infty$.*

Esquisse de Preuve. Soit $1 \leq p < \infty$, et

$$D = \Big\{ \sum_{i=0}^{N} \alpha_i 1_{Q_i}, \quad N \in \mathbb{N}, \quad \alpha_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}, \quad Q_i := \prod_{k=1}^{d}]a_{k,i}, b_{k,i}[, \quad a_{k,i}, b_{k,i} \in \mathbb{Q} \Big\}.$$

On montre que D est un ensemble dénombrable. Par densité de $C_c(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$, il suffit alors d'approcher dans L^p les éléments de $C_c(\Omega)$ par les éléments de D (exercice : s'inspirer de la preuve de l'approximation des fonctions continues par les fonctions en escalier).

Pour montrer que $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable, on utilise de nouveau le Lemme 3.1. Soit $I = \Omega$, et $f_i = 1_{B(i,r_i)}$ où $r_i > 0$ est choisi assez petit de sorte que $B(i, r_i) \subset \Omega$. On vérifie alors facilement que les ouverts $O_i := B(f_i, \frac{1}{4})$ sont 2 à 2 disjoints, ce qui montre la non-séparabilité.

Corollaire 3.5. *Pour tout* $1 \leq p < \infty$, les translations sont continues sur $L^p(\mathbb{R}^d)$ *: plus précisément, en notant* $\tau_h f(x) = f(x+h)$,

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0, \quad h \to 0.$$

3.2.3 Dualité

Proposition 3.7. *Soit* $1 \leq p \leq \infty$, *et* p' *l'exposant conjugué :* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Pour tout* $g \in L^{p'}(X)$, *l'application*

$$\varphi_g : L^p(X) \to \mathbb{C}, \quad f \to \int_X fg \, d\mu$$

est un élément de $\big(L^p(X)\big)'$, *et* $\|\varphi_g\|_{\left(L^p(X)\right)'} = \|g\|_{L^{p'}}$.

Théorème 3.4. (dualité L^p-$L^{p'}$)
Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré* σ*-fini. Soit* $1 \leq p < \infty$. *Soit* p' *l'exposant conjugué. Alors le dual topologique de* $L^p(X)$ *s'identifie à* $L^{p'}(X)$,

$$\big(L^p(X)\big)' \approx L^{p'}(X)$$

au sens précis suivant : l'application

$$I_p : L^{p'}(X) \to \big(L^p(X)\big)', \quad g \to \varphi_g$$

est un isomorphisme (isométrique).

3.3 Convolution

Soient $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ mesurables. On veut définir :

$$f \star g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy$$

Lemme 3.2. $\{x, \quad y \to |f(y)g(x-y)|$ *intégrable*$\}$ *est un borélien.*
De plus, si $f \star g(x)$ *est défini (c'est-à-dire que* x *appartient à l'ensemble ci-dessus),* $g \star f(x)$ *l'est aussi, avec égalité.*

Preuve. Découle du théorème de Fubini-Tonelli : la fonction $(x, y) \to f(x-y)g(y)$ est mesurable, donc

$$\varphi : x \to \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|dy$$

est une fonction mesurable de $\mathbb{R}^d$ dans $[0, +\infty]$. En particulier,

$$\{x, \quad y \to |f(y)g(x-y)| \text{ intégrable}\} = \varphi^{-1}([0, +\infty[)$$

est un borélien de $\mathbb{R}^d$.

Pour le second point, par changement de variable, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|dy < +\infty \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|dy < +\infty$$

On a donc $g \star f(x)$ bien défini. On peut alors faire le même changement de variable sans les valeurs absolues, ce qui donne bien $f \star g(x) = g \star f(x)$.

On va maintenant identifier des conditions sur f et g sous lesquelles $f \star g$ est défini presque partout.

3.3.1 Cadre $L^p \star L^q$

Théorème 3.5. ($L^1 \star L^1$)
Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f \star g$ est définie presque partout, $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, avec

$$\|f \star g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$$

Preuve. On utilise encore le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|dydx &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|dx|g(y)|dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x')|dx'|g(y)|dy = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} \end{aligned}$$

On en déduit que $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|dy$ est fini pour presque tout x, ce qui signifie que $f \star g$ est définie presque partout. De plus,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy \Big| dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|dydx = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$$

où la dernière égalité découle du calcul précédent.

Théorème 3.6. (Théorème de Young)
Soit $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$, alors $f \star g$ est définie presque partout, $f \star g \in L^r(\mathbb{R}^d)$, et

$$\|f \star g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

Exemple 3.1. Soulignons deux cas particuliers :
- $p = 1$: $L^1 \star L^p \subset L^p$.
- $q = p'$: $L^p \star L^{p'} \subset L^\infty$.

Preuve. On se limite au cas où $p, q, r \in]1, +\infty[$ (les cas limites sont plus simples). On va appliquer une inégalité de Hölder à trois termes (qui se montre de manière analogue à l'inégalité de Hölder usuelle) : *si $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$, $f_2 \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$ et $f_3 \in L^{p_3}(\mathbb{R}^d)$, avec*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1,$$

alors $f_1 f_2 f_3 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et

$$\|f_1 f_2 f_3\|_{L^1} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \|f_2\|_{L^{p_2}} \|f_3\|_{L^{p_3}}$$

On pose ici $p_1 = r$, $p_2 = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right)^{-1}$, $p_3 = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)^{-1}$. On écrit pour x fixé,

$$|f(x-y)g(y)| = f_(y)1 f_2(y) f_3(y)$$

avec

$$f_1(y) := |f(x-y)|^{\frac{p}{r}} |g(y)|^{\frac{q}{r}}, \quad f_2(y) := |f(x-y)|^{\frac{r-p}{r}}, \quad f_3(y) := |g(y)|^{\frac{r-q}{r}},$$

L'inégalité de Hölder aboutit à

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| dy &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy \Big)^{\frac{1}{p_1}} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p dy \Big)^{\frac{1}{p_2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|^q dy \Big)^{\frac{1}{p_3}} \\ &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p |g(y)|^q dy \Big)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^p}^{1-\frac{p}{r}} \|g\|_{L^q}^{1-\frac{q}{r}}\end{aligned}$$

En prenant la puissance r de cette inégalité et en intégrant en x, on trouve

$$\|f \star g\|_{L^r}^r \leq \|f\|_{L^p}^p \|g\|_{L^q}^q \|f\|_{L^p}^{r-p} \|g\|_{L^q}^{r-q}$$

ce qui permet de conclure.

Théorème 3.7. *Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors*
- *$f \star g$ défini pour tout x, et $|f \star g(x)| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$.*
- *$f \star g$ est uniformément continue.*
- *Si $1 < p < \infty$, $f \star g(x) \to 0$ quand $|x| \to +\infty$.*

Preuve. Le premier point découle de l'inégalité de Hölder. Pour le second point, quitte à inverser les rôles de f et g, on peut supposer $p < \infty$. On écrit alors

$$\begin{aligned}|f \star g(x+h) - f \star g(x)| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^d} (f(x+h-y) - f(x-y)) g(y) dy \Big| \\ &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h-y) - f(x-y)|^p dy \Big)^{\frac{1}{p}} \|g\|_{L^{p'}} = \|\tau_h f - f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}\end{aligned}$$

avec $\tau_h f(x) := f(x+h)$. Pour la dernière égalité, on a utilisé le changement de variable $y' = x - y$. Par la continuité des translations, *cf.* Corollaire 3.5, on conclut à l'uniforme continuité.

Pour le dernier point, on remarque que si $f, g \in C_c(\mathbb{R}^d)$, alors $f \star g \in C_c(\mathbb{R}^d)$, en particulier tend vers zéro quand $|x| \to +\infty$. Le cas général se déduit de la densité de $C_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ et dans $L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ (exercice).

3.3.2 Dérivabilité et convolution

Théorème 3.8. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in C^1(\mathbb{R}^d)$ bornée à dérivées partielles bornées, ou si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$, alors $f \star g \in C^1(\mathbb{R}^d)$, et pour tout $1 \leq i \leq d$, $\frac{\partial}{\partial x_i}(f \star g) = f \star \frac{\partial}{\partial x_i} g$.*

Preuve. Ce théorème découle des théorèmes classiques de dérivation sous le signe intégrale.

Pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, on rappelle la notation

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial_1^\alpha}{(\partial x_1)^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial_d^\alpha}{(\partial x_d)^{\alpha_d}} f.$$

Corollaire 3.6. *si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $f \star g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha(f \star g) = f \star \partial^\alpha g$.*

3.3.3 Approximation de l'unité

Définition 3.5. Une approximation de l'unité est une suite $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $L^1(\mathbb{R}^d)$ telles que

1. $\forall n$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(x) dx = 1$.
2. $\forall n$, $\rho_n \geq 0$ presque partout.
3. $\forall \eta > 0$, $\lim_{n \to +\infty} \int_{\{|y| > \eta\}} \rho_n(y) dy = 0$.

Exemple 3.2. Soit $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\rho \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) dx = 1$. Alors

$$\rho_n(x) := n^d \rho(nx)$$

définit une approximation de l'unité.

Théorème 3.9. *Si f est bornée et continue en tout point d'un compact K de $\mathbb{R}^d$, resp. si f est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$, alors*

$$f \star \rho_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} f \quad \textit{uniformément sur } K, \textit{ resp. sur } \mathbb{R}^d$$

Remarque 3.5. On sait que $f \star \rho_n$ est uniformément continue, comme convolée de $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et de $\rho_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$

Preuve. On se limite au deuxième cas : soit f bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe η tel que

$$|x - x'| \leq \ \eta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x')| \leq \ \varepsilon.$$

On a par les propriétés 1. et 2. de l'approximation de l'unité :

$$\begin{aligned}
|f(x) - f \star \rho_n(x)| &= \Big| \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\rho_n(y)dy - \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\rho_n(y)dy \Big| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \Big|f(x) - f(x-y)\Big|\rho_n(y)dy \\
&\leq \int_{\{|y|\leq\eta\}} \Big|f(x) - f(x-y)\Big|\rho_n(y)dy \ + \ \int_{\{|y|\geq\eta\}} \Big|f(x) - f(x-y)\Big|\rho_n(y)dy \\
&=: I_{n,\eta} + J_{n,\eta}
\end{aligned}$$

Pour le premier terme, on utilise l'uniforme continuité de f : on a pour tout n,

$$I_{n,\eta} \leq \varepsilon \int_{\{|y|\leq\eta\}} \rho_n(y)dy \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(y)dy = \varepsilon.$$

Pour le second terme, on écrit,

$$J_{n,\eta} \leq 2\|f\|_{L^\infty} \int_{\{|y|\geq\eta\}} \rho_n(y)dy \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

où on a utilisé la propriété 3. de l'approximation de l'unité. Le théorème est démontré.

En adaptant la preuve ci-dessus (en remplaçant l'uniforme continuité de f par la continuité des translations dans L^p, p fini) on peut montrer :

Théorème 3.10. *Soit $1 \leq p < \infty$. Alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $\rho_n \star f \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Corollaire 3.7. *$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, $p < \infty$.*

Preuve.

$$L_c^p(\mathbb{R}^d) := \{f \in L^p(\mathbb{R}^d), \quad f = 0 \ \text{ en dehors d'un compact}\}$$

est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, car $f 1_{B(0,n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Reste à montrer que $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L_c^p(\mathbb{R}^d)$. Mais si $f \in L_c^p(\mathbb{R}^d)$ et si $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'approximation de l'unité fournie dans l'Exemple 3.2, on a $\rho_n \star f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\rho_n \star f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Chapitre 4

Espaces de Hilbert

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1 Produit scalaire, orthogonalité

Définition 4.1 (Produit scalaire). Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Un produit scalaire sur E est une application $(\ |\ ) : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que

- **i)** Pour tout $y \in E$, $x \to (x|y)$ est linéaire.
- **ii)** Pour tous $x, y \in E$, $(x|y) = \overline{(y|x)}$.
- **iii)** Pour tout $x \in E$, $(x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
- **iv)** Pour tout $x \in E$, $(x|x) \geq 0$.

Remarque 4.1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la condition ii) devient $(x|y) = (y|x)$ (symétrie). Les conditions i) et ii) impliquent alors facilement la linéarité par rapport à la seconde variable : pour tout $x \in E$, $y \to (x|y)$ est linéaire. Un produit scalaire sur $\mathbb{R}$ est donc une *forme bilinéaire, symétrique, définie et positive* (par iii) et iv)).

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les conditions i) et ii) donnent la *semi-linéarité* par rapport à la seconde variable : pour tous $x, y, z \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $(x|y + \lambda z) = (x|y) + \overline{\lambda}(x|z)$. On dit qu'un produit scalaire sur $\mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire, à symétrie hermitienne, définie et positive.

Remarque 4.2. Avec notre définition, le produit scalaire est linéaire par rapport à la première variable (et semi-linéaire par rapport à la seconde). Il s'agit d'une convention courante, mais ce n'est pas la seule : de nombreuses autres références adoptent la linéarité en la seconde variable dans la définition du produit scalaire.

Exemple 4.1. Sur $\mathbb{R}^n$: $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Sur $\mathbb{C}^n$, $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$.

Exemple 4.2. Sur $C([0,1], \mathbb{R})$: $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Sur $C([0,1], \mathbb{C})$: $(f|g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$.

Proposition 4.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soit E un $\mathbb{K}-$ev, $(\,|\,)$ un produit scalaire sur E. Pour tous $x, y \in E$,*

$$|(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)}\,\sqrt{(y|y)}$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Preuve. On écrit que pour tous $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$, $(x + ty|x + ty) \geq 0$. En développant ce produit scalaire, on trouve $(x|x) + t(x|y) + t(y|x) + t^2(y|y) \geq 0$, ce qui s'écrit

$$(x|x) + 2t\mathcal{R}e\,(x|y) + t^2(y|y) \geq 0.$$

Il s'agit d'un trinôme du second degré en t qui ne change pas de signe. Son discriminant est donc négatif, ce qui donne $|\mathcal{R}e\,(x|y)| \leq (x|x)(y|y)$.

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cela conclut la preuve de l'inégalité. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on procède comme suit. On écrit $(x|y) = |(x|y)|e^{i\theta}$, ce qui implique $(e^{-i\theta}x|y) = |(x|y)|$. En particulier, en posant $x' = e^{-i\theta}x$ et $y' = y$, on a $(x'|y') = \mathcal{R}e\,(x'|y') = |(x|y)|$. En appliquant l'inégalité précédente à x' et y', on trouve

$$|(x|y)| \leq (x'|x')(y'|y') = (x|x)(y|y).$$

Le cas d'égalité correspond au cas où le discriminant du trinôme du second degré est nul, ce qui correspond à l'existence d'une racine réelle. En particulier, avec les notations précédentes, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x' + t_0 y' = 0$, ce qui donne $x = -t_0 e^{i\theta} y$.

Corollaire 4.1. *L'application $||x|| = \sqrt{(x|x)}$ est une norme sur E.*

Preuve. La seule chose non-triviale à vérifier est l'inégalité triangulaire, qui en élevant au carré est équivalente à

$$(x + y|x + y) \leq ||x||^2 + 2||x||||y|| + ||y||^2$$

En développant le membre de gauche, on trouve $2\mathcal{R}e\,(x|y) \leq 2||x||||y||$, qui découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|(x|y)| \leq ||x||||y||$.

Définition 4.2 (Espaces préhilbertiens, espaces de Hilbert). On appelle espace préhilbertien (sur $\mathbb{K}$) un $\mathbb{K}$-ev E muni d'un produit scalaire (et de la norme associée). On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien complet.

Exemple 4.3. L'espace $l^2(\mathbb{N})$ des suites réelles de carré sommable est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(x|y) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k$

Pour $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mesuré, l'espace $L^2(X, \mu)$ est un espace de Hilbert, pour le produit scalaire $(f|g) = \int_X f g d\mu$.

L'espace $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ est un espace préhilbertien muni du produit scalaire $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, mais non-complet. En effet, s'il était complet, il serait fermé dans $L^2(]0, 1[)$, or il est dense dans cet espace.

Les deux identités suivantes s'obtiennent en développant les carrés aux membres de droite.

Proposition 4.2. (Identité de polarisation) *Soit E préhilbertien, $x, y \in E$.*
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $(x|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $(x|y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-iy\|^2)$.

Proposition 4.3. (Identité du parallélogramme)

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x-y\|^2 + \|x+y\|^2.$$

Définition 4.3. (vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie) Soit E préhilbertien.
— $x, y \in E$ sont orthogonaux si $(x|y) = 0$.
— Si $A \subset E$, $A^\perp = \{y, \forall x \in A, (x|y) = 0\}$.

La preuve de la proposition suivante est laissée en exercice :

Proposition 4.4. (Propriétés de l'orthogonal)
— *Pour toute partie A, $A^\perp$ est un sev fermé de E.*
— $A^\perp = \overline{Vect(A)}^\perp$.

Proposition 4.5. (Pythagore)
Pour tous $x_1, \dots, x_n$ orthogonaux 2 à 2, $||x_1 + \cdots + x_n||^2 = ||x_1||^2 + \cdots + ||x_n||^2$.

4.2 Projection orthogonale

Théorème 4.1. (Projection sur un convexe fermé)
Soit H un Hilbert, A un convexe fermé non-vide de H.

i) *Pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in A$, appelé projeté orthogonal de x sur A, tel que $\|x-y\| = d(x, A)$.*

ii) *y est caractérisé par les deux propriétés suivantes : $y \in A$, et*

$$\mathcal{R}e\,(x-y|z-y) \leq 0, \quad \forall z \in A \tag{4.1}$$

Remarque 4.3. La condition (4.1) signifie que l'angle entre le vecteur $\vec{yx}$ et $\vec{yz}$ est obtus.

Preuve. On rappelle que $d(x, A) = \inf_{z \in A} ||x - z||$. On souhaite montrer que cet inf est un min, atteint en un unique point.

Existence du projeté. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A telle que $||x - y_n|| \to d(x, A)$. On souhaite montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On applique l'identité du parallélogramme :

$$2||a||^2 + 2||b||^2 = ||a-b||^2 + ||a+b||^2,$$

avec $a = x - y_p$, $b = x - y_q$. On trouve après quelques manipulations :

$$\|y_p - y_q\|^2 = 2\|x - y_p\|^2 + 2\|x - y_q\|^2 - 4\|x - \frac{y_p + y_q}{2}\|^2 \le 2\|x - y_p\|^2 + 2\|x - y_q\|^2 - 4d(x, A)^2.$$

Pour la dernière inégalité, on a utilisé la convexité de A, de sorte que $\frac{y_p+y_q}{2} \in A$ et $\|x - \frac{y_p+y_q}{2}\| \ge d(x, A)$. On obtient finalement

$$\lim_{p,q \to +\infty} \|y_p - y_q\| = 0.$$

Ainsi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, et donc convergente dans H complet. La limite y appartient à A car A est fermé, et $\|x - y\| = \lim_{n\to+\infty} \|x - y_n\| = d(x, A)$.

Unicité du projeté. Soient $y, y' \in A$ tels que $\|x - y\| = \|x - y'\| = d(x, A)$. On utilise de nouveau l'identité du parallélogramme avec $a = x - y$, $b = x - y'$: on trouve

$$\|y - y'\|^2 = 2\|x - y\|^2 + 2\|x - y'\|^2 - 4\|x - \frac{y + y'}{2}\|^2 \le 2\|x - y\|^2 + 2\|x - y'\|^2 - 4d(x, A)^2 = 0.$$

Ainsi $y = y'$.

Caractérisation du projeté. Le projeté orthogonal est clairement caractérisé par les deux relations suivantes : $y \in A$, et

$$\forall t \in [0, 1], \forall z \in A, \quad \|x - y\|^2 \le \|x - ((1 - t)y + tz)\|^2$$

En développant le carré du membre de droite , cette inégalité s'écrit : $\forall t \in [0, 1], \forall z \in A$,

$$\|x - y\|^2 \le \|x - y\|^2 + 2t\mathcal{R}e\,(x - y|y - z) + t^2\|y - z\|^2.$$

En simplifiant, on obtient : $\forall t \in [0, 1], \forall z \in A$,

$$0 \le 2\mathcal{R}e\,(x - y|y - z) + t\|y - z\|^2.$$

ce qui est bien équivalent à $0 \le \mathcal{R}e\,(x - y|y - z)$, qui est la condition cherchée.

On notera $p_A(x)$ le projeté orthogonal de x sur A. En utilisant la caractérisation donnée à la fin du théorème précédent, on peut montrer que p_A est une fonction 1- lipschitzienne de H dans H (exercice).

Dans le cas particulier où A est un sev, on peut aller plus loin dans l'analyse et aboutir au

Théorème 4.2. *Soit F un sev fermé.*

ii) *On a la caractérisation suivante, pour tout $x \in H$: $y = p_F(x)$ si et seulement si*

$$y \in F, \quad x - y \in F^\perp.$$

ii) *On a la décomposition : $H = F \oplus F^\perp$, et l'application $x \to p_F(x)$ est le projecteur (au sens de l'algèbre linéaire) sur F parallèlement à $F^\perp$.*

iii) *On a la relation :* $F = (F^\perp)^\perp$.

Preuve. i) On repart de la caractérisation : $y = p_F(x)$ si et seulement si

$$y \in F, \quad \mathcal{R}e\,(x - y|z' - y) \leq 0 \quad \forall z' \in F.$$

En prenant $z' = \lambda z + y$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $y \in F$, on obtient la condition équivalente

$$\mathcal{R}e\,\lambda(x - y|z) \leq 0 \quad \forall z \in F,$$

qui est équivalente à

$$(x - y|z) = 0, \quad \forall z \in F,$$

(si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, prendre $\lambda = \pm 1$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, prendre $\lambda = \pm 1$, puis $\lambda = \pm i$).

ii) Par le point précédent, on a $x - p_F(x) \in F^\perp$. La décomposition $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ montre que $H = F + F^\perp$. De plus, $F \cap F^\perp = \{0\}$ (exercice), ce qui montre $H = F \oplus F^\perp$. De plus, l'identité $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ montre que p_F est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.

iii) On a toujours $F \subset (F^\perp)^\perp$ (exercice). Réciproquement, soit $x \in G^\perp$, $G = F^\perp$. Notons que G est un sev fermé. Par le point précécent, $H = G \oplus G^\perp$. On a à la fois la décomposition

$$x = 0 + x, \quad 0 \in G, \quad x \in G^\perp,$$

$$\text{et} \quad x = (x - p_F(x)) + p_F(x), \quad x - p_F(x) \in F^\perp = G, \quad p_F(x) \in F \subset (F^\perp)^\perp = G^\perp.$$

Par unicité de la décomposition, on trouve donc $0 = x - p_F(x)$, $x = p_F(x)$, ce qui montre en particulier que $x \in F$.

Corollaire 4.2. *Soit F un sev de dimension finie de H, $e_1, \ldots, e_d$ une base orthonormée de F. Alors $p_F(x) = \sum_{i=1}^d (x|e_i)e_i$.*

Preuve. Soit $x \in H$, $y = \sum_{i=1}^d (x|e_i)e_i$. Clairement, $y \in F$. Par le point i) du théorème précédent, il suffit de montrer que $x - y \in F^\perp$, ce qui revient aux relations $(x - y|e_j) = 0$ pour tout j, qui se vérifient sans peine.

Corollaire 4.3. *Soit G un sev de H Hilbert. Alors G est dense dans H si et seulement si $G^\perp = \{0\}$.*

Preuve. On rappelle que pour toute partie A, $A^\perp = \overline{\mathrm{Vect}(A)}^\perp$. Si G est dense, on a $\overline{G} = H$, et par passage à l'orthogonal $G^\perp = \overline{G}^\perp = H^\perp = \{0\}$. Réciproquement supposons que $G^\perp = \{0\}$, ce qui est équivalent à $\overline{G}^\perp = \{0\}$. Comme $\overline{G}$ est un sev fermé, $(\overline{G}^\perp)^\perp = \overline{G}$, et finalement $\overline{G} = \{0\}^\perp = H$, ce qui montre que G est dense.

4.3 Dualité dans les espaces de Hilbert

Théorème 4.3. (Théorème de Riesz-Fréchet) *Soit H un Hilbert. Pour tout $\varphi \in H'$, il existe un unique y tel que $\varphi(x) = (x|y)$ pour tout $x \in H$.*

Preuve.

Unicité. Si y, y' satisfont $\varphi(x) = (x|y) = (x|y')$ pour tout x, on a $(x|y - y') = 0$ pour tout x, et donc en prenant $x = y - y'$, $||y - y'||^2 = 0$, ce qui montre $y = y'$.

Existence. Si $\varphi = 0$, $y = 0$ convient. Sinon, $F = \ker \varphi$ est un hyperplan (car φ forme linéaire) fermé (car φ est continue). Comme $H = F \oplus F^\perp$, on en déduit que $F^\perp$ est une droite vectorielle, $F^\perp = \mathbb{K}y'$. Par linéarité, comme $H = F \oplus \mathbb{K}y'$, il suffit de trouver y tel que

$$\varphi(x) = (x|y) \quad \forall x \in F, \quad \varphi(y') = (y'|y).$$

On cherche y sous la forme $y = \lambda y', \quad \lambda \in \mathbb{K}$. Pour n'importe quel λ, on a $\varphi(x) = (x|y) = 0$ pour tout $x \in F$, puisque $y = \lambda y' \in F^\perp$. Reste à ajuster λ de sorte que $\varphi(y') = (y'|y)$, ce qui revient à $\varphi(y') = \overline{\lambda}||y'||^2$, et finalement $\lambda = \frac{\overline{\varphi(y')}}{||y'||^2}$.

Définition 4.4. (convergence faible dans les espaces de Hilbert) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite dans H, $x \in H$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x si pour tout $y \in H$, $(x_n|y) \to (x|y)$ quand $n \to +\infty$.

Notons que par le théorème de Riesz, la convergence faible de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x revient à dire que pour tout $\varphi \in H'$, $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ quand $n \to +\infty$. Cette définition de convergence faible s'étend au cas d'un evn E général, comme nous le verrons au chapitre 5.2. Nous montrerons en particulier dans ce chapitre le résultat suivant :

Proposition 4.6. *Une suite bornée dans un espace de Hilbert admet une sous-suite qui converge faiblement.*

Preuve. Voir Chapitre 5.2, Corollaire 5.7.

4.4 Bases hilbertiennes

Théorème 4.4. *Soit H un Hilbert, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de vecteurs orthogonaux 2 à 2. On a : $\sum u_k$ converge ssi $\sum ||u_k||^2$ converge. Dans ce cas, si $u = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, on a $||u||^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} ||u_k||^2$. De plus, la série est commutativement convergente : pour toute bijection $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $u = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\psi(k)}$.*

Preuve. Par le critère de Cauchy dans H complet, la convergence de $\sum u_k$ revient à ce que

$$\lim_{p,q\to+\infty} \| \sum_{k=p}^{q} u_k|| = 0$$

Mais les u_k étant orthogonaux, on a par Pythagore $\| \sum_{k=p}^{q} u_k\|^2 = \sum_{k=p}^{q} ||u_k||^2$. Finalement, la convergence de $\sum u_k$ revient à ce que

$$\lim_{p,q\to+\infty} \sum_{k=p}^{q} ||u_k||^2 = 0$$

ce qui par le critère de Cauchy dans $\mathbb{R}$ est équivalent à la convergence de $\sum ||u_k||^2$. L'égalité des normes est obtenue en passant à la limite dans la relation

$$|| \sum_{k=0}^{n} u_k||^2 = \sum_{k=0}^{n} ||u_k||^2.$$

Reste à montrer que la série est commutativement convergente. Soit $\varepsilon > 0$, et $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$||u - \sum_{k=0}^{N_\varepsilon} u_k|| \leq \varepsilon, \quad \sum_{k=N_\varepsilon}^{+\infty} ||u_k||^2 \leq \varepsilon^2.$$

Alors pour toute partie finie $J \supset \{0, \dots, N_\varepsilon\}$,

$$||u - \sum_{k\in J} u_k|| = ||u - \sum_{k=0}^{N_\varepsilon} u_k - \sum_{J\setminus\{0,\dots,N_\varepsilon\}} u_k|| \ \leq ||u - \sum_{k=0}^{N_\varepsilon} u_k|| + || \sum_{J\setminus\{0,\dots,N_\varepsilon\}} u_k|| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

En particulier, on a

$$||u - \sum_{k=0}^{n} u_{\psi(k)}|| \leq 2\varepsilon$$

pour tout n tel que $\{\psi(1), \dots, \psi(n)\} \supset \{0, \dots, N_\varepsilon\}$.

Théorème 4.5. *Soit H Hilbert, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille orthonormée. Alors pour tout $x \in H$, $\sum(x|e_k)e_k$ converge. De plus, en notant $F = \overline{Vect(e_k, k \in \mathbb{N})}$, on a*

$$p_F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(x|e_k)e_k, \quad ||p_F(x)||^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |(x|e_k)|^2.$$

En combinant la dernière égalité avec la relation $||p_F(x)||^2 \leq ||p_F(x)||^2 + ||x - p_F(x)||^2 = ||x||^2$, on obtient le

Corollaire 4.4. (Inégalité de Bessel) *Pour tout $x \in H$ et toute famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthonormée,*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |(x|e_k)|^2 \leq ||x||^2.$$

Preuve du théorème. Soit $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$. On a vu précédemment que

$$p_{F_n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (x|e_k)e_k.$$

D'où : pour tout n, $\sum_{k=0}^{n} |(x|e_k)|^2 = ||p_{F_n}(x)||^2 \leq ||x||^2$. Les sommes partielles étant majorées, la série $\sum |(x|e_k)|^2 = \sum ||(x|e_k)e_k||^2$ converge. Par le théorème précédent avec $u_k = (x|e_k)e_k$, la série $\sum (x|e_k)e_k$ converge, et si l'on note y la somme de la série, on trouve

$$||y||^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} ||(x|e_k)e_k||^2.$$

Il reste à montrer que $y = p_F(x)$. Clairement, $y = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (x|e_k)e_k$ appartient à F. Reste à montrer que $x - y \in F^\perp$. Comme $F^\perp = \{e_k, k \in \mathbb{N}\}^\perp$, cela revient à montrer que $(x - y|e_j) = 0$ pour tout j. Or pour tout j et pour tout $n \geq j$, $(x - \sum_{k=0}^{n} (x|e_k)e_k|e_j) = 0$, d'où $(x - y|e_j) = 0$.

Définition 4.5. (Base hilbertienne) Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de H. On dit que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne si

- **i)** $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée.
- **ii)** $\overline{\mathrm{Vect}(e_k, k \in \mathbb{N})} = H$.

Remarque 4.4. De manière plus générale, on peut parler de base hilbertienne pour une famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexée par $\mathbb{Z}$ au lieu de $\mathbb{N}$.

Exemple 4.4. Soit $H = l^2(\mathbb{N})$. On vérifie facilement que la famille $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $e^n_k = 1$ si $k = n$, 0 sinon, est une base hilbertienne de H

Exemple 4.5. **Exemple fondamental**

Soit $H = L^2(]0,1[, \mathbb{C})$ (isomorphe à $L^2(\mathbb{T})$). H est un espace de Hilbert muni de $(f|g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$. On définit, pour $n \in \mathbb{Z}$, $e_n(t) = e^{2i\pi nt}$.

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de H.

Le caractère orthonormé de la famille résulte d'un simple calcul. Pour montrer la densité de $\mathrm{Vect}(e_k, k \in \mathbb{N})$, c'est-à-dire de l'espace des polynômes trigonométriques, on s'appuie sur la densité de $C^0_c(]0,1[)$ dans $L^2(]0,1[)$: elle implique en particulier la densité dans $L^2(]0,1[)$ de l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions de la forme $f|_{[0,1]}$, avec f continue 1-périodique. Or par le théorème de Weierstrass périodique, il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers toute fonction C^0 et 1-périodique sur $\mathbb{R}$, donc en particulier dans $L^2(]0,1[)$ (car la convergence uniforme sur un segment implique la convergence L^2). La densité de $\mathrm{Vect}(e_k, k \in \mathbb{N})$ dans $\mathcal{C}$, donc dans L^2, suit.

Proposition 4.7. *Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.*

Preuve. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans H. On extrait une sous-suite de la façon suivante. On pose $\varphi(0) = \min\{k, x_k \neq 0\}$. Puis $\varphi(0), \dots, \varphi(k)$ étant construits, on pose

$$\varphi(k+1) = \min\{j > \varphi(k), \quad x_j \notin \mathrm{Vect}(x_{\varphi(0)}, \dots, x_{\varphi(k)}\}.$$

En posant $y_n = x_{\varphi(n)}$, on a

— $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille libre

— $\mathrm{Vect}(y_n, n \in \mathbb{N}) = \mathrm{Vect}(x_n, n \in \mathbb{N})$ dense dans H.

On applique ensuite le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, qui fournit une base hilbertienne.

L'intérêt principal des bases hilbertiennes est de se substituer en dimension infinie à la notion de base algébrique, au sens suivant :

Théorème 4.6. *Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne. Pour tout $x \in H$, $\sum(x|e_k)e_k$ converge dans H, avec*

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} (x|e_k)e_k.$$

On a de plus l'égalité de Parseval *:*

$$||x||^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |(x|e_k)|^2.$$

Ce théorème est un corollaire direct du théorème précédent.

Application aux séries de Fourier. On peut appliquer le théorème à $H = L^2(]0,1[)$ et à la base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ des exponentielles imaginaires vue ci-dessus. Dans ce cadre, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et tout $f \in H$, $(f|e_k) = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi kt}dt = c_k(f)$, avec $c_k(f)$ le coefficient de Fourier d'indice k, et $\sum_{k=-n}^{n}(f|e_k)e_k = S_n(f)$, avec $S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{2i\pi kx}$ la somme partielle de la série de Fourier. Le théorème précédent montre que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = f \quad \text{dans } \; L^2(]0,1[)$$

et l'égalité de Parseval s'écrit dans ce cas

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2.$$

Chapitre 5

Formes linéaires continues

On rappelle que pour tout evn E, on note $E' = L(E, \mathbb{K})$ l'espace des formes linéaires continues sur E. La norme d'application linéaire associée sera notée $\| \|_{E'}$. On rappelle également la

Proposition 5.1. *Pour tout $\varphi \in E' \setminus \{0\}$, $\ker \varphi$ est un hyperplan fermé de E.*

Enfin, on rappelle la notation $\langle \varphi, x \rangle$ parfois utilisée à la place de $\varphi(x)$ (crochet de dualité).

5.1 Le théorème de Hahn-Banach

Le but principal de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant :

Théorème 5.1. (Hahn-Banach, forme analytique, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
Soit E un evn sur $\mathbb{R}$. Soit $p : E \to \mathbb{R}$ tel que :

i) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall \lambda > 0, \forall x \in E$

ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E$

Soit D un sev de E et $\varphi : D \to \mathbb{R}$ linéaire tel que $\varphi(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in D$. Alors il existe $\overline{\varphi} : E \to \mathbb{R}$ linéaire qui prolonge φ et tel que $\overline{\varphi}(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

Nous allons prouver le théorème dans le cas où E est de dimension finie. Nous renvoyons à [2] pour le cas général, pour lequel un argument supplémentaire basé sur l'axiome du choix est nécessaire.

Preuve. Soit E de dimension finie. Montrons le résultat par récurrence descendante sur la dimension n de D. Si $n = \dim E$, le résultat est immédiat. Supposons le résultat vrai au rang n, et montrons le résultat pour $\dim D = n - 1$. Soit $x_0 \in E \setminus D$. On pose $\tilde{D} := D \oplus \mathbb{R}x_0$. Soit $\varphi : D \to \mathbb{R}$ linéaire et t.q. $\varphi \leq p$ sur D. Supposons savoir prolonger φ en un $\tilde{\varphi} : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ linéaire et t.q. $\tilde{\varphi} \leq p$.Alors en appliquant l'hypothèse au rang n à $\tilde{D}$, on peut prolonger à son tour $\tilde{\varphi}$ en un $\overline{\varphi} : E \to \mathbb{R}$ qui convient.

Reste donc à expliquer comment prolonger φ en $\tilde{\varphi}$. Nécessairement, si un tel prolongement $\tilde{\varphi}$ existe, pour tt $x = y + \lambda x_0 \in \tilde{D}$ (où $y \in D$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ sont déterminés de manière unique), on doit avoir

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(y) + \lambda\tilde{\varphi}(x_0) = \varphi(y) + \lambda\alpha, \quad \alpha := \tilde{\varphi}(x_0).$$

Réciproquement, reste à déterminer s'il existe une valeur de α pour laquelle en posant

$$\tilde{\varphi}(y + \lambda x_0) := \varphi(y) + \lambda\alpha, \quad \forall y \in D, \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$$

(ce qui définit une forme linéaire $\tilde{\varphi} : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ qui prolonge φ), on a bien $\tilde{\varphi} \leq p$. Cette inégalité revient à montrer que : pour tout $y \in D$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(y) + \lambda\alpha \leq p(y + \lambda x_0)$$

L'inégalité est évidente pour $\lambda = 0$. Il suffit donc de montrer : pour tout $\lambda \neq 0$, pour tout $y \in D$,

$$\varphi(y/|\lambda|) + \operatorname{sign}(\lambda)\alpha \leq p(y/|\lambda| + \operatorname{sign}(\lambda)x_0)$$

où on a utilisé la première propriété satisfaite par p. En posant $y' = y/|\lambda|$, cela revient à :

$$\begin{cases} \forall y' \in D, \quad \varphi(y') + \alpha \leq p(y' + x_0), \\ \forall y' \in D, \quad \varphi(y') - \alpha \leq p(y' - x_0) \end{cases}$$

ou encore

$$\forall y', z \in D, \quad \varphi(z) - p(z - x_0) \leq \alpha \leq p(y' + x_0) - \varphi(y').$$

Finalement, il existe un α vérifiant cette double inégalité ssi :

$$\forall y', z \in D, \quad \varphi(z) - p(z - x_0) \leq p(y' + x_0) - \varphi(y')$$

ou encore ssi

$$\forall y', z \in D, \quad \varphi(z + y') \leq p(z - x_0) + p(y' + x_0)$$

ce qui est vrai car

$$\varphi(z + y') \leq p(z + y') = p(z - x_0 + y' + x_0) \leq p(z - x_0) + p(y' + x_0)$$

où on a utilisé l'inégalité triangulaire satisfaite par p. Cela conclut la preuve du théorème.

Avec des modifications mineures, on peut prouver le théorème suivant, valable pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

Théorème 5.2. (Hahn-Banach, forme analytique, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
Soit E un $\mathbb{K}$-evn. Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une semi-norme, c'est-à-dire telle que :

i) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad \forall\lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$

ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E$

Soit D un sev de E et $\varphi : D \to \mathbb{K}$ linéaire tel que $|\varphi(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in D$. Alors il existe $\overline{\varphi} : E \to \mathbb{K}$ linéaire qui prolonge φ et tel que $|\overline{\varphi}(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

Corollaire 5.1. (Prolongement des formes linéaires)
Soit E un evn, et D un sev de E. Si $\varphi \in D'$, il existe une forme linéaire $\overline{\varphi} \in E'$ qui prolonge φ, et telle que

$$\|\overline{\varphi}\|_{E'} = \|\varphi\|_{D'}.$$

Remarque 5.1. Le Corollaire 5.1 rappelle le Théorème 2.5 de prolongement des applications linéaires continues. Il y a deux différences fondamentales. La première est que le sev D du Corollaire 5.1 n'est pas supposé dense dans E. La seconde est que le Corollaire 5.1 est limité aux formes linéaires, pour lesquelles l'espace d'arrivée est donc $F = \mathbb{K}$.

Preuve. On applique le Théorème 5.2 avec $p(x) = \|\varphi\|_{D'}||x||_E$. Cela fournit une forme linéaire $\overline{\varphi}$ sur E qui prolonge φ et telle que pour tout $x \in E$, $\|\overline{\varphi}(x)\| \leq \|\varphi\|_{D'}||x||_E$. On en déduit que $\overline{\varphi} \in E'$ avec $\|\overline{\varphi}\|_{E'} \leq \|\varphi\|_{D'}$. L'autre inégalité est immédiate (la norme d'un prolongement est toujours plus grande).

Corollaire 5.2. *Soit E un evn. Pour tout $x \in E$, $x \neq 0$, il existe $\varphi \in E'$ t.q. $\|\varphi\|_{E'} = 1$ et $\varphi(x) = ||x||_E$.*

Remarque 5.2. Ce corollaire montre en particulier que si $E \neq \{0\}$, $E' \neq \{0\}$, ce qui n'a rien d'évident !

Preuve. On applique le Corollaire 5.1 avec $D = \mathbb{K}x$ et $\varphi(\lambda x) := \lambda\|x\|_E$.

Corollaire 5.3. *Soit E un evn. Pour tout $x \in E$,*

$$\|x\|_E = \sup_{\|\varphi\|_{E'}=1} |\langle \varphi, x\rangle|$$

Corollaire 5.4. *Soit E un evn, $F \subset E$ un sev fermé distinct de E. Alors il existe $\varphi \in E'$ t.q. $\|\varphi\|_{E'} = 1$ et $\varphi = 0$ sur F.*

Preuve. Soit $x_0 \notin F$, $D = F \oplus \mathbb{K}x_0$. On définit $\psi : D \to \mathbb{K}$ par : pour tout $y \in F$, pour tout $\lambda \in K$,

$$\psi(y + tx_0) = t$$

On vérifie que ψ est une forme linéaire, avec $\psi|_F = 0$. Par ailleurs, comme $\alpha := \mathrm{dist}(z_0, F) > 0$, on a pour tout $\lambda \neq 0$, pour tout $y \in F$,

$$\|y + \lambda x_0\|_E = |\lambda|\|\frac{y}{\lambda} + x_0\|_E \geq |\lambda|\alpha.$$

Cela montre que

$$|\psi(y + \lambda x_0)| = |\lambda| \leq \frac{1}{\alpha}\|y + \lambda x_0\|_E$$

ce qui montre que $\psi \in D'$. On applique alors le Corollaire 5.1, qui fournit un prolongement $\varphi \in E'$ de ψ qui convient.

Corollaire 5.5. (critère de densité) *Soit E un evn, $F \subset E$ un sev. Alors $\overline{F} = E$ ssi pour tout $\varphi \in E'$, $\varphi|_F = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.*

Corollaire 5.6. *Soit E un evn tel que E' séparable (cf. Définition 1.4). Alors E est séparable.*

Preuve. Soit $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans E'. Par définition de la norme d'opérateur, pour tout n, il existe x_n tel que $\|x_n\|_E = 1$ et $|\varphi_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|\varphi_n\|_{E'}$. Soit $Y = \mathrm{Vect}(\{x_n, n \in \mathbb{N}\})$. Montrons que Y est dense dans E. Soit $\varphi \in E'$ t.q. $\varphi = 0$ sur Y. On a en particulier $\varphi(x_n) = 0$ pour tout n. On en déduit

$$\frac{1}{2}\|\varphi_n\|_{E'} \leq |\varphi_n(x_n)| = |(\varphi_n - \varphi)(x_n)| \leq \|\varphi_n - \varphi\|_{E'}.$$

On en déduit

$$\|\varphi\|_{E'} \leq \|\varphi_n - \varphi\|_{E'} + \|\varphi_n\|_{E'} \leq 3\|\varphi_n - \varphi\|_{E'}.$$

Par densité des φ_n dans E', on en déduit $\varphi = 0$, et par le critère de densité précédente, on a $\overline{Y} = E$. On vérifie finalement que

$$Y_{\mathbb{Q}} := \{\sum_{i \in I} \lambda_i x_i, \ I \ \text{ fini }, \ \lambda_i \in \mathbb{Q}_{\mathbb{K}} \ \forall i \in I\}$$

avec $\mathbb{Q}_K := \mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}} := \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, est un ensemble dénombrable dense dans Y, donc dans E.

Remarque 5.3. Le dernier corollaire montre que les Théorèmes 3.1 et 3.4 ne s'étendent pas au cas $p = \infty$. Par exemple, si $l^1(\mathbb{N})$ était isomorphe à $\Big(l^\infty(\mathbb{N})\Big)'$, on aurait $\Big(l^\infty(\mathbb{N})\Big)'$ séparable car $l^1(\mathbb{N})$ l'est (Proposition 3.3). Par le corollaire précédent, on aurait alors $l^\infty(\mathbb{N})$ séparable, ce qu'on sait être faux (Proposition 3.3). Le même argument s'applique à $L^\infty(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$.

On conclut ce paragraphe avec des conséquences géométriques du théorème de Hahn-Banach. Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Nous introduisons d'abord quelques définitions.

Définition 5.1. (Hyperplan affine)
Soit E un evn. On appelle hyperplan affine fermé de E un ensemble de la forme

$$H := \{x, \varphi(x) = \alpha\}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in E'$.

Définition 5.2. (séparation par un hyperplan)
Soient $A, B \subset E$. On dit que l'hyperplan fermé $H := \{\varphi = \alpha\}$ sépare A et B au sens large si l'on a

$$\varphi(x) \leq \alpha \quad \forall x \in A, \quad \varphi(x) \geq \alpha \quad \forall x \in B.$$

On dit que H sépare A et B au sens strict s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varphi(x) \leq \alpha - \varepsilon \quad \forall x \in A, \quad \varphi(x) \geq \alpha + \varepsilon \quad \forall x \in B.$$

Voici deux théorèmes de séparation, dits théorèmes de Hahn-Banach géométriques.

Théorème 5.3. (Théorème de Hahn-Banach, première forme géométrique) *Soient A, B deux ensembles convexes disjoints non-vides de E. On suppose A ouvert. Alors il existe un hyperplan affine fermé de E qui sépare A et B au sens large.*

Théorème 5.4. (Théorème de Hahn-Banach, seconde forme géométrique) *Soient A, B deux ensembles convexes disjoints non-vides de E. On suppose A fermé et B compact. Alors il existe un hyperplan affine fermé de E qui sépare A et B au sens strict.*

Nous donnons ici des éléments de preuve du premier théorème, et renvoyons à [2] pour des preuves complètes. La preuve du Théorème 5.3 repose sur la notion de jauge d'un convexe ouvert :

Lemme 5.1. (jauge d'un convexe)
Soit $C \subset E$ un convexe ouvert avec $0 \in C$. Pour tout $x \in E$, on pose

$$p(x) := \inf\{\alpha > 0, \quad \frac{x}{\alpha} \in C\}.$$

(jauge de C). Alors p satisfait les hypothèses du Théorème 5.1. De plus, il existe $M > 0$ tel que

$$0 \leq p(x) \leq M\|x\|_E \quad \forall x \in E$$

et

$$C = \{x, p(x) < 1\}.$$

Preuve du lemme. Soit $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset C$. Il est clair que pour tout $x \in E$, $p(x) \leq \frac{1}{r}||x||$, ce qui montre l'avant-dernière propriété du lemme. La propriété $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $\lambda > 0$ est elle aussi immédiate. Montrons le dernier point du lemme, puis l'inégalité triangulaire. Supposons d'abord que $x \in C$. Comme C est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)x \in C$. Donc $p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Réciproquement, supposons que $x \in E$, $p(x) < 1$. Il existe $0 < \alpha < 1$ tel que $\alpha^{-1}x \in C$, et finalement $x = \alpha\alpha^{-1}x + (1-\alpha)0_E \in C$ par convexité. Ainsi, $C = \{x, p(x) < 1\}$.

Soient maintenant $x, y \in E$. On sait d'après ce qui précède que $x' := \frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C$, car $p(y) = \frac{1}{p(x)+\varepsilon}p(x) < 1$. De même, $y' := \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$, et finalement $tx' + (1-t)y' \in C$ pour tout $t \in [0, 1]$. En posant $t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$ on obtient $z := \frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C$, d'où $p(z) < 1$, ce qui donne $p(x + y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon$, et $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on obtient bien l'inégalité triangulaire.

Lemme 5.2. *Soit C un convexe ouvert non-vide et soit $x_0 \in E \setminus C$. Alors il existe $\varphi \in E'$ tel que $\varphi(x) < \varphi(x_0)$ pour tout $x \in C$. En particulier, l'hyperplan $H = \{\varphi = \varphi(x_0)\}$ sépare C et $\{x_0\}$ au sens large.*

Preuve du lemme. Par translation on peut toujours supposer que $0 \in C$. Soit p la jauge de C comme dans le lemme ci-dessus. On pose $D = \mathbb{R}x_0$. Soit $\psi \in D'$ définie par $\psi(tx_0) = t$, $t \in \mathbb{R}$. On vérifie assez facilement (exercice !) que

$$\psi(x) \leq p(x) \quad \forall x \in D.$$

On applique alors le Théorème 5.1 qui fournit un $\varphi \in E'$ prolongement de ψ tel que

$$\varphi(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E.$$

En particulier $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = 1$, alors que pour tout $x \in C$, $\varphi(x) \leq p(x) < 1$.

Preuve du Théorème 5.3. On pose $C = A - B$, qui est un ouvert ne contenant pas 0. D'après le lemme précédent, il existe $\varphi \in E'$ tel que

$$\varphi(x) < \varphi(0) = 0 \quad \forall x \in C$$

ce qui implique

$$\varphi(y) < \varphi(z), \quad \forall y \in A, z \in B.$$

En posant $\alpha = \sup_{y \in A} \varphi(y)$, on obtient le résultat voulu.

5.2 Convergence faible, faible*

Définition 5.3. (Convergence faible)
Soit E un evn, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x \in E$ si

$$\forall \varphi \in E', \quad \varphi(x_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \varphi(x).$$

Remarque 5.4. On note la convergence faible avec une flèche ayant un demi-chevron : $x_k \rightharpoonup x$, ou $x_k \underset{k\to+\infty}{\rightharpoonup} x$.

Proposition 5.2. *La convergence usuelle (c'est-à-dire au sens de la norme) implique la convergence faible :* $x_k \to x \;\Rightarrow\; x_k \rightharpoonup x$.

Preuve. Si $x_k \to x$, pour tout $\varphi \in E'$, par continuité de φ, $\varphi(x_k) \to \varphi(x)$.

Remarque 5.5. La convergence au sens usuel est souvent appelée dans ce contexte convergence *forte*, pour la différencier de la convergence faible.

La convergence forte implique la convergence faible, mais la réciproque est fausse. Un contre-exemple est le suivant. Soit $E = l^p(\mathbb{N})$, $p > 1$. On a vu que $E' \approx l^{p'}(\mathbb{N})$ au sens où pour tout $\varphi \in E'$, il existe $y \in l^{p'}(\mathbb{N})$ tel que pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_k$. Soit $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $e^n_k = 0$ si $k \neq n$, $e^n_n = 1$. On a alors

$$\varphi(e^n) = \sum e^n_k y_k = y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \quad \text{car} \quad \sum |y_k|^{p'} < +\infty$$

On a utilisé ici que p' est fini car $p > 1$. Ainsi, $e^n \rightharpoonup 0$, mais $||e^n||_{l^p} = 1$ pour tout n.

En revanche, la suite $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas faiblement vers 0 dans $E = l^1(\mathbb{N})$: en effet, si l'on introduit $y = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N})$, et $\varphi(x) = \sum x_k y_k$, on a $\varphi \in E'$, mais

$$\varphi(e^n) = (-1)^n \not\to 0.$$

Proposition 5.3. *Si E evn de dimension finie, la convergence forte et la convergence faible coïncident.*

Preuve. Soit $e_1, \quad e_d$ base de E ($\dim E = d$). Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightharpoonup x$. On a $x_n = \sum_{i=1}^d e_i^*(x_n)e_i$, avec $e_i^* \in E'$ pour tout i (forme linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie). En particulier, $e_i^*(x_n) \to e_i^*(x)$ pour tout i, et finalement

$$x_n = \sum_{i=1}^{d} e_i^*(x_n)e_i \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{i=1}^{d} e_i^*(x)e_i = x.$$

Proposition 5.4. (Une application linéaire fortement continue est faiblement continue) *Soit $T \in L_c(E,F)$, et $x_n \rightharpoonup x$. Alors $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$.*

Preuve. Exercice

Proposition 5.5. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightharpoonup x$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, et*

$$||x|| \leq \liminf_{n\to+\infty} ||x_n||$$

Preuve. On suppose $E \neq \{0\}$, sinon le résultat est trival. Soit $T_n : E' \to \mathbb{R}, \quad T_n(\varphi) = \varphi(x_n)$, et $T : E' \to \mathbb{R}, \quad T(\varphi) = \varphi(x)$. Pour tout n, T_n est une forme linéaire, avec

$$|T_n(\varphi)| = |\varphi(x_n)| \leq \|\varphi\|_{E'}\|x_n\|.$$

En particulier, $T_n \in L_c(E',\mathbb{R}) = E''$ (le *bidual* de E), avec $||T_n||_{E''} \leq ||x_n||$. Si $x_n = 0$, on a clairement $||T_n||_{E''} = ||x_n|| = 0$. Si $x_n \neq 0$, par un corollaire du théorème de Hahn-Banach, il existe $\varphi_n \in E'$ telle que $|\varphi_n(x_n)| = ||x_n||$. En prenant $\varphi = \varphi_n$, on trouve $||T_n||_{E''} = ||x_n||$. De même, $||T||_{E''} = ||x||$.

Finalement, l'hypothèse $x_n \rightharpoonup x$ équivaut à : $T_n(\varphi) \to T(\varphi)$ pour tout $\varphi \in E'$. On applique le corollaire du théorème de Banach-Steinhaus : $\sup_n ||T_n||_{E''} < +\infty$, et $||T||_{E''} \leq \liminf_n \|T_n\|_{E''}$. Le résultat suit.

Définition 5.4. (Convergence faible*) Soit E un evn. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E'. On dit que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faible* vers $\varphi \in E'$ si

$$\varphi_n(x) \to \varphi(x) \quad \forall x \in E.$$

Remarque 5.6. C'est la convergence simple. Notation : $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$.

Comme pour la convergence faible, on montre facilement la

Proposition 5.6. *La convergence usuelle dans E' (au sens de la norme) implique la convergence faible*.*

De manière similaire, on a la

Proposition 5.7. *Soit E Banach. Si $\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$, alors $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, et $\|\varphi\|_{E'} \leq \liminf_n \|\varphi_n\|_{E'}$.*

Preuve. On applique directement le corollaire de Banach-Steinhaus à la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 5.1. L'espace $l^\infty(\mathbb{N})$ peut être vu comme le dual de $l^1(\mathbb{N})$. En particulier, pour $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite dans $l^\infty(\mathbb{N})$, $y^n \overset{*}{\rightharpoonup} y$ signifie que pour tout $x \in l^1(\mathbb{N})$, on a $\sum x_k y_k \to 0$. On peut en particulier vérifier que la suite $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ introduite plus haut converge faible* vers 0.

Exemple 5.2. **(convergence faible et faible* dans les espaces de Hilbert)**
Par le théorème de Riesz, on peut identifier H et H', *via* l'isomorphisme $H \to H', \quad y \to \varphi_y$, avec $\varphi_y(x) = (x|y)$. Pour une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace de Hilbert, on a donc à la fois la notion de convergence faible, et la notion de convergence faible* : $y_n \overset{*}{\rightharpoonup} y$ signifie $\varphi_{y_n} \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi_y$. On a très facilement que :

$$y_n \rightharpoonup y \ \Leftrightarrow\ y_n \overset{*}{\rightharpoonup} y \ \Leftrightarrow\ (x|y_n) \to (x|y) \ \text{ pour tout } \ x \in H.$$

Exemple 5.3. **(convergence faible et faible* dans L^p)**
Pour $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré σ-fini, on a vu qu'on peut identifier $(L^p(X))'$ et $L^{p'}(X)$ pour tout $p < \infty$. On peut en particulier parler de la convergence faible* d'une suite (f_n) de $L^q(X, \mu)$ pour $1 < q \leq \infty$: $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans L^q signifie que $\int_X f_n g d\mu \ \to\ \int_X f g d\mu$ pour tout $g \in L^p(X)$ avec $p' = q$, c'est-à-dire $p = q'$. Finalement :

— Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $L^1(X, \mu)$, $f_n \rightharpoonup f$ dans L^1 signifie :

$$\int_X f_n g d\mu \ \to\ \int_X f g d\mu \quad \forall g \in L^\infty(X).$$

— Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $L^q(X, \mu)$, $1 < q < +\infty$, $f_n \rightharpoonup f$ dans L^q est équivalent à $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans L^q et signifie :

$$\int_X f_n g d\mu \ \to\ \int_X f g d\mu \quad \forall g \in L^{q'}(X, \mu).$$

— Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $L^\infty(X)$, $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans L^∞ signifie :

$$\int_X f_n g d\mu \ \to\ \int_X f g d\mu \quad \forall g \in L^1(X, \mu).$$

Remarque 5.7. Convergence faible et convergence faible* ne coïncident pas dans L^∞ : en identifiant L^1 à un sous-espace de $(L^\infty)'$, on a facilement que la convergence faible implique la convergence faible*, mais la réciproque est fausse. Un contre-exemple est le suivant : soit δ l'application de $C_c^0(\mathbb{R})$ (muni de $\| \|_\infty$) dans $\mathbb{R}$ définie par : $\delta(f) = f(0)$ (c'est la masse de Dirac en 0). Il s'agit d'une forme linéaire continue sur le sev $C_c^0(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$. Par le théorème de Hahn-Banach, cette forme linéaire se prolonge en un élement de $(L^\infty(\mathbb{R}))'$, que l'on note encore δ pour simplifier. Soit $f_n(x) = \chi(nx)$, avec $\chi \in C_c^0(\mathbb{R})$, positive, telle que $\chi(0) = 1$. On vérifie facilement que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$, mais $\delta(f_n) = f_n(0) = 1$, ce qui montre que f_n ne converge pas faiblement vers 0 dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

Ce raisonnement montre en particulier que l'élément δ ainsi construit appartient à $(L^\infty(\mathbb{R}))'$, mais n'est pas identifiable à un élément de $L^1(\mathbb{R})$. *Cf.* Remarque 5.3.

Un résultat essentiel de cette section est le

Théorème 5.5. (Théorème de Banach-Alaoglu)
Soit E un evn séparable. Toute suite bornée de E' admet une sous-suite qui converge faible dans E'.*

Pour montrer ce résultat, nous aurons besoin du

Lemme 5.3. *Soit E evn, D partie dense dans E. Soit $\psi \in E'$, $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ bornée dans E', qui converge simplement vers $\psi \in E'$ sur D. Alors $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\psi \in E'$ sur E, c'est-à-dire $\psi_j \overset{*}{\rightharpoonup} \psi$.*

Preuve du lemme. Soit $\varepsilon > 0$, $x \in E$, $y \in D$ tel que $||x - y|| \leq \varepsilon$ (possible par densité de D). Soit j_0 tel que pour tout $j \geq j_0$, $|\psi_j(y) - \psi(y)| \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $j \geq j_0$,

$$\begin{aligned}|\psi_j(x) - \psi(x)| &\leq |\psi_j(x) - \psi_j(y)| + |\psi_j(y) - \psi(y)| + |\psi(y) - \psi(x)| \\ &\leq \|\psi_j\|_{E'}||x - y|| + \varepsilon + \|\psi\|_{E'}||x - y|| \leq C\varepsilon, \quad C = \sup_j \|\psi_j\|_{E'} + 1 + \|\psi\|_{E'}.\end{aligned}$$

Preuve du théorème de Banach-Alaoglu. Soit $D = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ une partie dénombrable dense dans E. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans E'. En particulier, pour tout k, $(\varphi_n(x_k))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. Par procédé diagonal, on on peut trouver une sous-suite φ_{n_j} telle que $\varphi_{n_j}(x_k)$ converge pour tout k quand $j \to +\infty$. Par linéarité, pour tout $x = \sum_{k=0}^K \lambda_k x_k \in \mathrm{Vect}(x_k, k \in \mathbb{N})$ $\varphi_{n_j}(x) = \sum_{k=0}^K \lambda_k \varphi_{n_j}(x_k)$ converge quand $j \to +\infty$. On note $\varphi(x)$ sa limite. On a φ forme linéaire sur $F = \mathrm{Vect}(x_k, k \in \mathbb{N})$, (comme limite simple des formes linéaires φ_{n_j}), et de plus

$$|\varphi(x)| = \lim_{j\to+\infty} |\varphi_{n_j}(x)| \leq \limsup_{j\to+\infty} ||x||$$

ce qui montre que φ est continue sur F. Or F dense dans E, donc par le théorème de prolongement des applications linéaires continues, φ peut être étendue en un élément $\overline{\varphi} \in E'$. On conclut en appliquant le lemme avec $D = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$, $\psi_j = \varphi_{n_j}$, et $\psi = \overline{\varphi}$.

Exemple 5.4. On a vu que si Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, $E = L^p(\Omega)$ est un espace séparable pour tout p fini. En reprenant les exemples précédents, on a

- Toute suite (f_n) bornée dans $L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, admet une sous-suite qui converge faible*, ou de manière équivalente, faiblement.
- Toute suite (f_n) bornée dans $L^\infty(\Omega)$ admet une sous-suite qui converge faible*.

Concernant les espaces de Hilbert, on déduit du théorème de Banach-Alaoglu le

Corollaire 5.7. *Toute suite bornée dans un espace de Hilbert admet une sous-suite qui converge faiblement.*

On rappelle que les notions de convergence faible et faible* sont équivalentes dans un Hilbert et signifient : $(x|y_n) \to (x|y)$ pour tout $x \in H$.

Preuve. Si l'espace de Hilbert H est séparable, cela découle directement du théorème de Banach-Alaoglu. Sinon, soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans H. On pose $F = \overline{\mathrm{Vect}(y_k, k \in \mathbb{N})}$, qui est un Hilbert séparable. Le théorème de Banach-Alaoglu donne l'existence d'une sous-suite $(y_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ et d'un $y \in F$ tels que $(x|y_{n_j}) \to (x|y)$ pour tout $x \in F$. quand $j \to +\infty$. Mais par ailleurs, $(x|y_{n_j}) = (x|y) = 0$ pour tout $x \in F^\perp$. Comme $H = F \oplus F^\perp$, on en déduit que $(x|y_{n_j}) \to (x|y)$ pour tout $x \in H$, ce qui est le résultat souhaité.

Le théorème de Banach-Alaoglu fournit un résultat de "compacité faible*, sorte de substitut au théorème de Bolzano-Weierstrass en dimension finie. Il est naturel de se demander si un résultat de compacité analogue est valable pour la convergence faible. La réponse est oui, à condition que E soit un espace *réflexif* :

Définition 5.5. (Espace réflexif) Soit E un evn, $E'' = (E')'$ son bidual. On dit que E est réflexif si tout élement de E" est de la forme $\hat{x}$, où pour $x \in E$, $\hat{x}$ est l'élément de E'' défini par $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$, $\varphi \in E'$.

Pour tout E evn, on peut montrer que l'application $E \to E''$, $x \to \hat{x}$ est une isométrie linéaire. Ainsi, E est réflexif si cette isométrie est surjective.

Nous renvoyons au livre [2] pour plus de détails autour de cette notion. On peut en particulier montrer que les espaces de Hilbert sont réflexifs, et que pour $1 < p < +\infty$, si X est σ-fini, $L^p(X)$ est réflexif. On a alors le théorème de compacité faible suivant (voir [2] pour une preuve).

Théorème 5.6. *Si E est un evn réflexif, toute suite bornée dans E admet une sous-suite qui converge faiblement.*

Notons que le théorème précédent ne s'applique pas à l'espace $L^1(\Omega)$, dont on peut montrer qu'il n'est pas réflexif. Et en effet, une suite bornée dans $L^1(\Omega)$ n'admet pas nécessairement de sous-suite qui converge faiblement. Il y a deux obstacles à la compacité faible :

— Le premier est *la fuite de masse à l'infini* : un exemple typique d'un tel phénomène est donné par la suite de fonctions indicatrices $f_n = 1_{[n,n+1]}$. En effet, pour tout $g \in C_c^0(\mathbb{R})$, on a clairement $\int_{\mathbb{R}} f_n g \to 0$ quand $n \to +\infty$. En particulier, si une sous-suite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement, sa limite f doit vérifier $\int_{\mathbb{R}} fg = 0$ pour tout $g \in C_c^0(\mathbb{R})$, ce qui implique $f = 0$ (presque partout). Mais pour $g = \sum_{k\in\mathbb{N}} (-1)^k 1_{[k,k+1]} \in L^\infty(\mathbb{R})$, on a $\int_{\mathbb{R}} f_n g = (-1)^n$, qui n'admet pas de sous-suite convergeant vers 0.

— Le second est *la concentration de la masse* : un exemple typique est donné par la suite $f_n = n 1_{[0,\frac{1}{n}]}$. En effet, pour tout $g \in C^0(\mathbb{R})$, on montre facilement que $\int_{\mathbb{R}} f_n g \to g(0)$. Si on avait $f_{n_j} \rightharpoonup f$ dans L^1 on aurait alors $\int_{\mathbb{R}} fg = g(0)$ pour tout $g \in C^0(\mathbb{R})$, ce qui est absurde (prendre la suite $g_k(x) = \chi(kx)$ pour $\chi \in C_c^0(\mathbb{R})$ avec $\chi(0) = 1$).

Il s'agit des deux seules obstructions à la convergence faible, comme l'atteste le célèbre théorème de Dunford-Pettis (voir [1] pour une preuve) :

Théorème 5.7. (Dunford-Pettis)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^1(\Omega)$ et équi-intégrable*, c'est-a-dire telle que*

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $|A| \leq \eta \Rightarrow \int_A |f_j| \leq \varepsilon$ uniformément en j.

Alors $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge faiblement dans $L^1(\Omega)$. Réciproquement, si $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans $L^1(\Omega)$, elle est bornée et équi-intégrable.

Chapitre 6

Transformée de Fourier

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ désigne le produit scalaire usuel, et $|x|$ désigne la norme euclidienne de x : $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

6.1 Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$

Définition 6.1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. La transformée de Fourier de f, notée $\hat{f}$ ou $\mathcal{F}f$, est la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque 6.1. La définition de la transformée de Fourier peut varier selon les références : ajout d'un 2π dans la phase, coefficient devant l'intégrale ...

Proposition 6.1. *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$), avec*

$$||\hat{f}||_\infty \leq ||f||_{L^1}.$$

De plus, on a la propriété de Riemann-Lebesgue :

$$\hat{f}(\xi) \to 0, \quad |\xi| \to +\infty.$$

Preuve. La continuité de $\hat{f}$ découle facilement du théorème de continuité sous l'intégrale. De plus,

$$|\hat{f}(\xi)| = \Big|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx\Big| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \big|e^{-ix\cdot\xi} f(x)\big|dx = ||f||_{L^1}$$

qui donne la dernière inégalité de la proposition. Reste à montrer la propriété de Riemann-Lebesgue. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $||f - g||_{L^1} \leq \varepsilon$ (qui existe par densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans L^1). On écrit

$$|\hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)|| + |\hat{g}(\xi)| = |f \hat{-} g(\xi)| + |\hat{g}(\xi)| \leq \|f - g\|_{L^1} + |\hat{g}(\xi)| \leq \varepsilon + |\hat{g}(\xi)|.$$

Il reste à montrer que $\hat{g}$ tend vers zéro à l'infini : on aura alors qu'il existe $R > 0$ tel que $|\xi| \leq R \Rightarrow |\hat{g}(\xi)| \leq \varepsilon \Rightarrow |\hat{f}(\xi)| \leq 2\varepsilon$.

Pour cela, on calcule

$$\begin{aligned}
|\xi|^2\hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\xi_1^2 + \dots \xi_n^2) e^{-ix\cdot\xi} g(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\big) e^{-ix\cdot\xi}\, g(x)dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} g(x)\big)dx,
\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant d'une intégration par parties. En notant $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ (c'est l'opérateur aux dérivées partielles appelé *Laplacien*), on aboutit à $|\xi|^2\hat{g}(\xi) = -\hat{\Delta g}(\xi)$, et en particulier :

$$|\xi|^2|\hat{g}(\xi)| \leq ||\Delta g||_{L^1}$$

ce qui montre bien que $\hat{g}$ tend vers zéro à l'infini.

Exemple 6.1 ($n = 1$). Pour $f(x) = e^{-|x|}$, $\hat{f}(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$.

Pour $f(x) = 1_{[-a,a]}(x)$, on a $\hat{f}(\xi) = 2\frac{\sin(a\xi)}{\xi}$ pour $\xi \neq 0$, et $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f = 2a$.

On peut noter que pour ce dernier exemple, la transformée de Fourier est continue, comme annoncé dans le théorème. En revanche, elle n'est pas dans L^1.

La proposition ci-dessous contient une série de propriétés de la transformée de Fourier. La preuve de chacune de ces propriétés est simple et laissée en exercice.

Proposition 6.2. (Quelques propriétés)

— **Fourier et translation** *: Soit $h \in \mathbb{R}^n$, et T_h l'opérateur de translation :* *$T_h f(x) = f(x + h)$. On a $\mathcal{F}(T_h f)(\xi) = e^{i\xi\cdot h}\mathcal{F}f(\xi)$.*

— **Fourier et homothétie** *: Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et H_λ l'opérateur d'homothétie :* *$H_\lambda f(x) = f(\lambda x)$. On a $\mathcal{F}(H_\lambda f)(\xi) = \frac{1}{\lambda^n} H_{\frac{1}{\lambda}}\mathcal{F}f(\xi)$.*

— **Fourier et multiplication** *: Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout j, alors $\mathcal{F}f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $\partial_{\xi_j}(\mathcal{F}f) = -i\mathcal{F}(x_j f)$.*

— **Fourier et dérivation** *: Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$, et $\partial_{x_j} f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors* *$\mathcal{F}(\partial_{x_j} f)(\xi) = i\xi_j\mathcal{F}f(\xi)$.*

Remarque 6.2. On voit en particulier qu'à une multiplication par un monôme dans l'*espace physique* (en x) correspond une dérivation dans l'*espace spectral* (en ξ), et vice versa. En particulier, il y a une correspondance entre décroissance dans l'espace physique (resp. dans l'espace spectral) et régularité dans l'espace spectral (resp. dans l'espace physique).

Par ailleurs, la dernière propriété de la proposition est une raison essentielle pour laquelle la transformée de Fourier est un incroyable outil de calcul : en faisant des calculs dans l'espace spectral, on peut remplacer une dérivation (opération compliquée d'un point de vue analytique et numérique) par la multiplication par un monôme, opération algébrique beaucoup plus simple.

Application : calcul de la transformée de Fourier de la gaussienne. Nous allons montrer que pour tout $a > 0$,

$$\mathcal{F}\big(e^{-a|x|^2}\big) = \big(\frac{\pi}{a}\big)^{n/2} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}. \tag{6.1}$$

En utilisant la relation (exercice)

$$\mathcal{F}\big(f_1(x_1)\dots f_n(x_n)\big) = \mathcal{F}f(\xi_1)\dots\mathcal{F}f(\xi_n)$$

on se ramène au cas $n = 1$. Soit $f_a(x) = e^{-ax^2}$, $x \in \mathbb{R}$. On a : $f_a'(x) = -2axf_a(x)$. En appliquant la transformée de Fourier aux deux membres de cette égalité, et en utilisant les liens Fourier/multiplication et Fourier/dérivation, on aboutit à : $i\xi\hat{f}_a(\xi) = -2ai\frac{d}{d\xi}\hat{f}_a(\xi)$, ce qui par intégration de cette équation différentielle en ξ donne $\hat{f}_a(\xi) = \hat{f}_a(0)e^{-\frac{a}{4}\xi^2}$. Reste ensuite à déterminer

$$\hat{f}_a(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

le calcul de la dernière intégrale étant classique.

Théorème 6.1. (Inversion de Fourier)
Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)d\xi \quad \textit{pour presque tout } x.$$

Remarque 6.3. Cette dernière relation peut s'écrire en abrégé : $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^n}\overline{\mathcal{F}}$

Grandes lignes de la preuve. L'égalité à montrer s'écrit (en remplaçant $\hat{f}$ par sa définition) :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi}f(y)dyd\xi \quad \text{pour presque tout } x.$$

On souhaite utiliser Fubini, mais l'intégrande n'est pas intégrable comme fonction du couple (y,ξ). On introduit la régularisation suivante : pour $\varepsilon > 0$,

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)}e^{-\varepsilon^2\frac{|\xi|^2}{4}}f(y)dyd\xi.$$

En intégrant d'abord en y, puis en ξ, on trouve

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}g_\varepsilon(\xi)d\xi$$

avec $g_\varepsilon(\xi) = e^{-\varepsilon^2\frac{|\xi|^2}{4}}\hat{f}(\xi)$. On a $g_\varepsilon(\xi) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \hat{f}(\xi)$ pour presque tout ξ, avec $|g_\varepsilon(\xi)| \le |\hat{f}(\xi)|$ intégrable par hypothèse. Le théorème de convergence dominée permet de conclure que

$$I_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)d\xi \quad \text{pour tout } x. \tag{6.2}$$

Par ailleurs, on peut appliquer le théorème de Fubini à l'intégrale double définissant I_ε. En intégrant d'abord en ξ, puis en y, on trouve cette fois

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\cdot\xi}e^{-\varepsilon^2\frac{|\xi|^2}{4}}d\xi\Big)dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\hat{F}_\varepsilon(y-x)dy, \quad \text{avec } F_\varepsilon(\xi) = e^{-\varepsilon^2\frac{|\xi|^2}{4}}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule (6.1), qui permet de calculer $\widehat{F}_\varepsilon$, on aboutit à

$$I_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\rho_\varepsilon(x-y)dy = \rho_\varepsilon \star f(x)$$

où $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi^{n/2}\varepsilon^n}e^{-|x|^2/\varepsilon^2}$. On vérifie alors que ρ_ε est une approximation de l'unité (voir chapitre convolution). En particulier, on a que $\rho_\varepsilon \star f$ converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ quand $\varepsilon \to 0$. Mais il est connu que la convergence L^1 entraine la convergence presque partout d'une sous-suite. Il existe donc une suite I_{ε_k} telle que

$$I_{\varepsilon_k}(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(x) \quad \text{pour presque tout } x. \tag{6.3}$$

En comparant (6.2) et (6.3), on obtient la formule d'inversion de Fourier.

Corollaire 6.1. Injectivité de la transformée de Fourier sur L^1.
Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f} = 0 \Rightarrow f = 0$ presque partout.

6.2 Espace de Schwartz et transformée de Fourier

Pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on rappelle les notations : $\partial^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Définition 6.2. (L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \Big\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), \quad \forall\alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \forall k, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^k|\partial^\alpha f(x)| < +\infty\Big\}$$

Exemple 6.2. $x \to e^{-\sqrt{|x|^2+1}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\quad x \to e^{-x} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $x \to \frac{1}{1+|x|^2} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 6.4. Les fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sont appelées fonctions à décroissance rapide.

On peut munir $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de la famille de normes

$$\|f\|_k = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|\le k}(1+|x|^2)^k|\partial^\alpha f(x)|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

A partir de cette famille, on peut définir une distance par la formule

$$d_{\mathcal{S}}(f,g) = \sum_{k\geq 0} \frac{\min(1, ||f-g||_k)}{2^k} \tag{6.4}$$

On peut vérifier que $d_{\mathcal{S}}$ est bien une distance, et que

$$d_{\mathcal{S}}(f_j, f) \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|f_j - f\|_k \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0 \, \forall k.$$

De plus, on peut montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, muni de $d_{\mathcal{S}}$, est un espace métrique complet.

Théorème 6.2. *$\mathcal{F}$ envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est bijective.*

Preuve. En utilisant le lien Fourier/multiplication , *cf. Proposition 6.2*, on a facilement :

$$\forall k,\ |x|^k f \in L^1(\mathbb{R}^n) \ \Rightarrow\ \hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

De manière symétrique, on déduit du lien Fourier/dérivation que

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ \forall \alpha,\ \partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n) \ \Rightarrow\ \forall k,\ |\xi|^k \hat{f} \in C_b(\mathbb{R}^n).$$

On déduit de ces deux propriétés que $\mathcal{F}$ envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Reste ensuite à montrer la surjectivité de $\mathcal{F}$, vue comme application de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même (l'injectivité vient du corollaire 6.1). Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On pose

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} g(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi'} g(-\xi') d\xi' = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F} g_-(x), \quad g_-(\xi) = g(-\xi).$$

Comme $g_- \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f = \frac{1}{(2\pi)^n} g_- \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, puis $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On peut donc appliquer la formule d'inversion de Fourier :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi'} \hat{f}(-\xi') d\xi' = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F} \hat{f}_-(x).$$

Par injectivité de la transformée de Fourier, on trouve $\hat{f}_- = g_-$, c'est-à-dire $\hat{f} = g$.

6.3 Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^n)$

Proposition 6.3. *Soient $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On a*

$$(2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

Preuve. En utilisant la formule d'inversion de Fourier,

$$(2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\,\hat{g}(\xi)d\xi}dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\,\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx\,\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi$$

En particulier, en prenant $f = g$ dans la formule précédente, on a :

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \|\hat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^{n/2}\|f\|_{L^2}. \tag{6.5}$$

Ainsi,

$$\mathcal{F} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \| \ \|_{L^2}) \to L^2(\mathbb{R}^n)$$

est linéaire continue. Comme $C_c^0(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'est aussi. On peut ainsi appliquer le théorème de prolongement des applications linéaires continues :

Théorème 6.3. (Transformée de Fourier L^2)
$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ s'étend en une application linéaire continue (encore notée $\mathcal{F}$, ou $\hat{}$) de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 6.5. Le fait de garder la même notation $\mathcal{F}$ pour la transformée de Fourier sur L^1 et sur L^2 n'est pas gênant, car les deux définitions coïncident sur $L^1 \cap L^2$. En effet, pour tout $f \in L^1 \cap L^2$, il existe une suite (f_k) dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, donc dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, telle que

$$f_k \to f \quad \text{dans } L^1, \quad f_k \to f \quad \text{dans } L^2$$

(voir le chapitre sur la convolution). Comme les transformées de Fourier de f_k au sens L^1 et L^2 coïncident, par continuité de $\mathcal{F}$ sur L^1 et L^2, les transformées de Fourier de f au sens L^1 et L^2 coïncident aussi.

Théorème 6.4. *$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ est un isomorphisme, avec* l'égalité de Parseval *:*

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \|\hat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^{n/2}\|f\|_{L^2}.$$

Preuve. L'égalité de Parseval, vraie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *cf.* (6.5), reste vraie par densité sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, à constante multiplicative près, $\mathcal{F}$ est une isométrie sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, en particulier injective. On en déduit que $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n))$ est un complet (l'image d'un complet par une isométrie est un complet, exercice), donc un fermé de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Mais il contient $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, qui est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Finalement, $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^n)) = L^2(\mathbb{R}^n)$, ce qui montre la surjectivité.

On conclut ce chapitre en soulignant le lien crucial entre convolution et transformée de Fourier :

Théorème 6.5. (Lien Fourier-Convolution) *Pour tout couple (f, g) dans $L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n)$ ou dans $L^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$*

$$\mathcal{F}(f \star g) \ = \ \mathcal{F}f\,\mathcal{F}g$$

Preuve : On peut remarquer que les différents objets intervenant dans cette égalité sont bien définis : par exemple, si $(f,g) \in L^1(\mathbb{R}^n) \times L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On peut en prendre la transformée de Fourier. Raisonnement analogue pour $(f,g) \in L^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$. Par ailleurs, par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, et par continuité du produit de convolution et de la transformée de Fourier, il est suffisant de montrer l'égalité pour $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On écrit

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f \star g)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{-i(x-y)\cdot\xi} f(x-y)\right) \left(e^{-iy\cdot\xi} g(y)\right) dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{-iy\cdot\xi} g(y)\right) \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{-i(x-y)\cdot\xi} f(x-y)\right) dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot\xi} g(y)dy \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{-ix'\cdot\xi} f(x')\right) dx = \mathcal{F}f(\xi)\, \mathcal{F}g(\xi)
\end{aligned}$$

où on a utilisé le théorème de Fubini et le changement de variable $x' = x - y$.

6.4 Transformée de Fourier et diffraction

Nous allons décrire dans cette section une application concrète de la transformée de Fourier. Elle repose sur le joli lien entre la transformée de Fourier et le phénomène dit de *diffraction*. On appelle diffraction le comportement d'une onde (lumineuse, sonore, ...) lorsqu'elle rencontre un obstacle ou une ouverture de taille comparable à sa longueur d'onde. Le phénomène de diffraction a été mis en évidence par Grimaldi au 17ème siècle, et popularisé par Young en 1801 : dans une expérience devenue célèbre, Young fait passer une onde lumineuse à travers deux fentes parallèles, et projette l'onde qui en ressort sur un écran. Y apparaît alors une *figure d'interférences*, alternant des bandes sombres et claires. Cette alternance est due à l'interaction (interférence) des ondes sphériques émises par les deux fentes, et atteste de la nature ondulatoire de la lumière. Lorsque l'obstacle ou l'ouverture a une taille grande devant la longueur d'onde, le phénomène de diffraction disparaît, la trajectoire des rayons lumineux étant alors bien décrite par les lois de l'optique dite géométrique.

Concrètement, le calcul des figures de diffraction se fait selon le principe de *Huygens-Fresnel* : l'onde diffractée est obtenue en sommant des ondes sphériques issues de chaque point de l'obstacle ou de l'ouverture. La situation typique est la suivante : on considère un faisceau incident selon le vecteur unitaire $e_x = (1,0,0)$, qui rencontre un *masque de diffraction* situé dans le plan $\{x = 0\}$, centré à l'origine $O = (0,0,0)$. Supposons pour simplifier que l'onde soit décrite par une amplitude complexe. Soit $\mathcal{A}_0$ l'amplitude de l'onde incidente. On veut calculer l'amplitude $\mathcal{A}(M)$ reçue en un point $M = (r, y_M, z_M)$ d'un écran situé à une distance $r > 0$ du plan du masque. La formule de Huygens-Fresnel donne

$$\mathcal{A}(M) = \mathcal{A}_0 \int tr(P) \frac{e^{\frac{2i\pi}{\lambda} PM}}{PM} d\sigma(P)$$

où l'intégrale (surfacique) est prise en les points P du masque de diffraction, et $tr(P)$ désigne le facteur de transmission au point P. Le terme $\frac{e^{\frac{2i\pi}{\lambda}PM}}{PM}$ est typique d'une onde sphérique issue du point P.

Si l'écran est suffisamment lointain (*diffraction de Fraunhofer*), on peut obtenir une expression approchée simplifiée. Plus précisément, en notant d le diamètre du masque de diffraction, on peut vérifier que sous les hypothèses

$$|y_M|, |z_M| \ll r, \quad \frac{d^2}{r} \ll \lambda$$

on a

$$\frac{1}{PM} \approx \frac{1}{r}, \quad \frac{2i\pi}{\lambda} PM \approx \frac{2i\pi}{\lambda}\big(r - \vec{OP} \cdot \frac{\vec{OM}}{OM}\big).$$

Notons que la longueur d'onde λ est en général très faible, de sorte que le deuxième terme de la deuxième identité ne doit pas être oublié. En notant $P = (0, y, z)$, $\alpha := \frac{2\pi}{\lambda r} y_M$, $\beta := \frac{2\pi}{\lambda r} z_M$, on aboutit à

$$\mathcal{A}(M) \approx \mathcal{A}_0 \frac{e^{\frac{2i\pi}{\lambda} r}}{r} \int_{\mathbb{R}^2} t(y,z) e^{-i(\alpha y + \beta z)} dy dz$$

où on a noté $t(y, z) = tr(P)$ pour $P = (0, y, z)$ dans le masque de diffraction, $t(y, z) = 0$ sinon.

On voit en particulier que le calcul de l'onde diffractée fait intervenir la transformée de Fourier de la fonction t.

Exemple 6.3. **(Diffraction à travers une fente rectangulaire)** Un exemple classique de diffraction est la diffraction à travers une ouverture rectangulaire de longueur a et largeur b, où a et b sont comparables à la longueur d'onde. Avec les notations précédentes, on a

$$t(y, z) = 1_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]}(y)\, 1_{[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]}(z)$$

L'amplitude complexe sur l'écran lointain est alors proportionnelle à la transformée de Fourier de t, qui peut être calculée grâce à l'Exemple 6.1. On trouve

$$\mathcal{A}(M) \propto a \mathrm{sinc}(\pi\alpha a)\, b \mathrm{sinc}(\pi\beta b), \quad \mathrm{sinc}(x) := \frac{\sin(x)}{x}.$$

En pratique, ce qu'on s'attend à observer sur l'écran est l'intensité de l'onde lumineuse, c'est-à-dire

$$\mathcal{I}(M) = |\mathcal{A}(M)| = ab\, |\mathrm{sinc}(\pi\alpha a)|\, |\mathrm{sinc}(\pi\beta b)|$$

Ce résultat théorique s'avère conforme à l'observation : voir la Figure 6.3 où apparaissent des oscillations amorties typiques de |sinc|.

Exemple 6.4. **(Cas limite d'une fente fine)** Si b est pris plus grand (en particulier plus grand que la longueur d'onde, la diffraction n'aura plus lieu que dans la direction y, *cf.* Figure 6.4

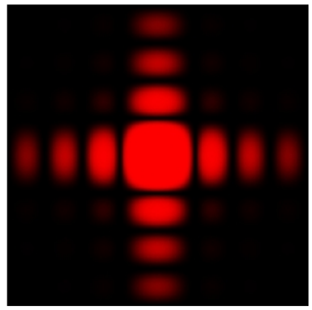

FIGURE 6.1 – Figure de diffraction à travers une fente rectangulaire

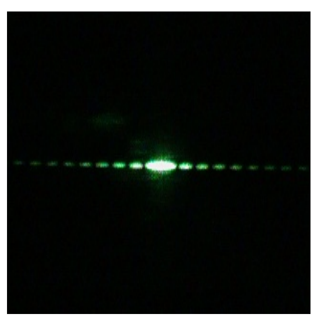

FIGURE 6.2 – Figure de diffraction à travers une fente fine

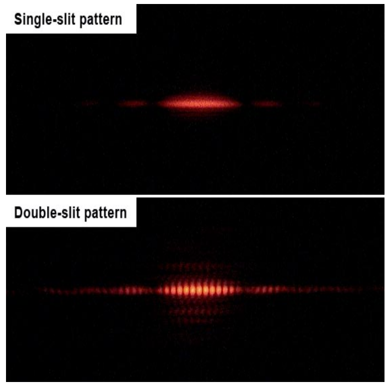

FIGURE 6.3 – En bas, figure de diffraction à travers deux fentes

Exemple 6.5. **(Diffraction à travers deux fentes rectangulaires)** On s'intéresse dans cet exemple à la figure de diffraction obtenue à travers deux fentes rectangulaires distantes de h :

$$t(x,y) = 1_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(y)\, 1_{[-\frac{b}{2},\frac{b}{2}]}(z) \;+\; 1_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}(y+h)\, 1_{[-\frac{b}{2},\frac{b}{2}]}(z).$$

On a vu dans la Proposition 6.2 la formule pour la transformée de Fourier d'une translatée. On obtient :

$$\mathcal{A}(M) \propto (1 + e^{i\alpha h})\, a\mathrm{sinc}(\pi\alpha a)\, b\mathrm{sinc}(\pi\beta b)$$

Le facteur $(1 + e^{i\alpha h})$ traduit l'interférence entre les figures de diffraction issues de chacune des fentes, et est responsable d'une alternance de bandes plus sombres (quand le facteur s'annule) et plus claires (quand il vaut ± 2). Voir Figure 6.5, avec la diffraction à travers deux fentes fines.

Exemple 6.6. **(holographie)** Lorsqu'on photographie un objet de façon classique, on enregistre sur la surface sensible (par exemple une plaque photographique) l'intensité lumineuse issue des différents points de l'objet (le module de l'amplitude complexe), mais on ne garde pas pas trace de la profondeur relative de chaque point (traduite par la phase de l'amplitude complexe). En exploitant le lien entre diffraction et transformée de Fourier, on peut améliorer ce principe pour créer un hologramme de l'objet . Pour cela, on procède en deux étapes. Dans la première étape, d'enregistrement, on va faire interférer sur la plaque photographique deux faisceaux lumineux laser : le premier, appelé faisceau de référence, est directement projeté sur la plaque. Le second est projeté sur l'objet dont on souhaite créer l'hologramme, et réfléchi sur la plaque. L'idée est que l'interférence du faisceau de réference et du faisceau reflété par l'objet va renseigner sur la phase des ondes lumineuses issues de l'objet (et donc de la profondeur relative de ses différents points) : ainsi, les bandes claires vont être associées à des ondes en phase avec le faisceau de référence, alors que les bandes sombres seront associées à des ondes en décalage de phase.

Dans la deuxième étape, on utilise la figure d'interférences formée sur la plaque photographique comme un masque de diffraction, en l'éclairant de nouveau par une source laser. On a de cette façon accès à la transformée de Fourier de la fonction de transmission du masque, qui permettra de restituer un hologramme de l'objet.

Chapitre 7

Distributions

Un ouvrage très complet sur les distributions est [6]. Le lecteur pourra s'y référer pour les preuves non traitées dans ces notes. Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Toutes les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

7.1 L'espace des fonctions test $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 7.1. Soit K compact inclus dans Ω.
On note $\mathcal{D}_K(\Omega)$ l'ensemble des fonctions C^∞ sur Ω, à support dans K.
On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions C^∞ sur Ω à support compact : $\mathcal{D}(\Omega) = \cup_{K \text{compact} \subset \Omega} \mathcal{D}_K(\Omega)$.

Remarque 7.1. Notations alternatives : $C_K^\infty(\Omega)$, $C_c^\infty(\Omega)$.

Proposition 7.1. *Soit K compact. L'application*

$$d(f,g) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{\min(1, \|\partial^\alpha f - \partial^\alpha g\|_\infty)}{2^k}$$

définit une distance sur $\mathcal{D}_K(\Omega)$ et $(\mathcal{D}_K(\Omega), d)$ est un espace métrique complet. De plus,

$$d(f_j, f) \xrightarrow[j \to +\infty]{} 0 \;\Leftrightarrow\; \partial^\alpha f_n \to \partial^\alpha f \quad \textit{uniformément, pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

7.2 L'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition 7.2. On appelle distribution une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$, continue en restriction à chaque $\mathcal{D}_K(\Omega)$, K compact. On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions.

Remarque 7.2. Pour $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on note $\langle u, \varphi \rangle$ le scalaire (réel ou complexe) $u(\varphi)$ (*crochet de dualité*).

Proposition 7.2. *Une forme linéaire u sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution si et seulement si : pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C_K > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$,*

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C_K \sup_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty}. \tag{7.1}$$

Si de plus, s'il existe un entier k tel que (7.1) peut être choisi indépendamment du compact K, on dit que u est d'ordre fini, et on appelle ordre de u le miminum de tels entiers k.

Esquisse de preuve. Pour K compact arbitraire, en utilisant la caractérisation de la convergence des suites dans $(\mathcal{D}_K(\Omega), d)$, *cf.* la proposition précédente, on voit facilement que si u vérifie (7.1), elle est continue sur $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Ainsi, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Réciproquement, supposons que $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Par l'absurde, supposons qu'il existe K compact, et une suite $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}_K(\Omega)$ telle que

$$|\langle u, \varphi_j \rangle| \geq j \sup_{|\alpha| \leq j} \|\partial^\alpha \varphi_j\|_{L^\infty}.$$

Quitte à diviser l'inégalité par $\sup_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha \varphi_j\|_{L^\infty}$, et à remplacer φ_j par

$$\tilde{\varphi}_j = \frac{\varphi_j}{\sup_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha \varphi_j\|_{L^\infty}}$$

on peut supposer que pour tout j, $\sup_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha \varphi_j\|_{L^\infty} = 1$. L'inégalité précédente devient $|\langle u, \varphi_j \rangle| \leq j$. Grâce à la condition $\sup_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha \varphi_j\|_{L^\infty} = 1$, on a en particulier que pour tout k fixé, et pour tout $j \geq k$, $\sup_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha \varphi_j\|_{L^\infty} = 1$. En particulier, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ fixé, la suite $\partial^\alpha \varphi_j$ est uniformément bornée et équicontinue. En utilisant un procédé diagonal et le théorème d'Ascoli, on peut en déduire l'existence d'une sous-suite $(\varphi_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha \varphi^j$ converge uniformément sur K, vers un élément φ_α. Par unicité de la limite, on montre facilement que $\varphi_\alpha = \partial^\alpha \varphi$, avec $\varphi = \varphi_{(0,\ldots,0)}$. Finalement, $\varphi_{j_k} \to \varphi$ quand $k \to +\infty$, au sens de la distance d. Mais $|\langle u, \varphi_{j_k} \rangle| \to +\infty$, ce qui contredit la continuité de u sur $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

Nous allons maintenant présenter des exemples de distributions. L'exemple fondamental est donné par la

Proposition 7.3. (les fonctions localement intégrables peuvent être vues comme des distributions)
Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Alors f définit une distribution u_f par la formule

$$\langle u_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De plus, $f \to u_f$ est injective.

Remarque 7.3. L'injectivité de $f \to u_f$ peut être traduite par : *deux fonctions égales au sens des distributions sont égales presque partout.* C'est une propriété cruciale, qui permet de voir les fonctions localement intégrables comme un sev de l'ev des distributions. Elle permet également d'identifier f et u_f : dans la suite, on fera souvent l'abus de notation $\langle f, \varphi \rangle$ pour $\langle u_f, \varphi \rangle$.

Preuve. On montre d'abord que u_f est une distribution. Il s'agit clairement d'une forme linéaire. Sa "continuité" découle ensuite de la proposition précédente et de l'inégalité

$$|\langle u_f, \varphi\rangle| \leq \Big(\int_K |f|\Big) \, \|\varphi\|_\infty.$$

Reste à montrer que $u_f = 0 \Rightarrow f = 0$. On a par hypothèse : $\int_\Omega f\varphi = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Soit ρ_j une approximation de l'unité C^∞. Soit $x_0 \in \Omega$. On pose $\varphi_j(x) = \rho_j(x - x_0)\chi(x)$, avec $\chi \in \mathcal{D}(\Omega)$. La relation $\int_\Omega f\varphi_j = 0$ s'écrit dans ce cas : $\rho_j \star (f\chi)(x_0) = 0$. Comme x_0 est arbitraire, on obtient que $\rho_j \star (f\chi) = 0$. Mais $f\chi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, d'où $\rho_j \star (f\chi) \to f\chi$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. On en déduit que pour tout $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $f\chi = 0$ presque partout. Cela implique $f = 0$ presque partout dans Ω (exercice).

Exemple 7.1. **(Autres exemples de distributions)**

- Toute mesure localement finie, ou toute mesure complexe sur $\mathbb{R}^n$ définit une distribution sur $\mathbb{R}^n$ par la formule $\langle u_\mu, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu$. Comme dans le cas des fonctions intégrables, on peut montrer que $\mu \to u_\mu$ est injective, et noter $\langle \mu, \varphi\rangle$ pour $\langle u_\mu, \varphi\rangle$.
- Soit $a \neq 0$. Pour toute suite de réels $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on note $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \delta_{ka}$ la forme linéaire définie par

$$\langle \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \delta_{ka}, \varphi\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \varphi(ka), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

  On peut remarquer que le membre de droite est bien défini : comme φ est à support compact, la somme est en fait finie. On vérifie que $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \delta_{ka}$ est une distribution. Dans le cas où $\lambda_k = 1$ pour tout k, on parle d'un *peigne de Dirac.*

Définition 7.3. (Convergence d'une suite de distributions) Soit $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}'(\Omega)$, et $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers u si : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle u_n, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle$.

Exemple 7.2. Si $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \in \mathbb{R}$, $\delta_{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta_a$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exemple 7.3. Soit $f_n(x) = sin(nx)$. On a $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (en identifiant f_n et u_{f_n}). En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle f_n, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} sin(nx)\varphi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} sin(-nx)\varphi(x)dx = \mathcal{I}m\,\hat{\varphi}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

par la propriété de Riemann-Lebesgue.

Nous concluons ce paragraphe avec la notion de support d'une distribution.

Définition 7.4. (Restriction d'une distribution) Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, O un ouvert inclus dans Ω. On appelle restriction de u à O l'application $u|_{\mathcal{D}(O)}$. On la note $u|_O$ pour alléger.

On dit que $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est nulle sur O si $u|_O = 0$. Plus généralement, si $u, v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on dit que $u = v$ sur O si $u|_O = v|_O$.

Proposition 7.4. (Support d'une distribution)
Soit O l'union de tous les ouverts de Ω sur lesquels u est nulle. Alors u est nulle sur O, et $F = \Omega \setminus O$ est appelé support de u*.*

Preuve. Soit $(O_i)_{i\in I}$ la famille de tous les ouverts sur lesquels $u = 0$, et soit $O = \cup_{i\in I} O_i$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(O)$. Soit K le support de φ. Les O_i, $i \in I$ forment un recouvrement ouvert de K, dont on peut par compacité extraire un recouvrement fini $O_{i_1}, \ldots, O_{i_M}$. Soit $\chi_1, \ldots, \chi_M$ une partition de l'unité C^∞ associée, c'est-à-dire telle que $\sum_{j=1}^m \chi_j = 1$ au voisinage de K, avec χ_j à support dans O_{i_j} pour tout j. On a en particulier $(\sum \chi_j)\varphi = \varphi$. D'où :

$$\langle u, \varphi\rangle = \langle u, \sum_j \chi_j \varphi\rangle = \sum_j \langle u, \chi_j \varphi\rangle = 0$$

en utilisant que $\chi_j \varphi \in C_c^\infty(O_{i_j})$ et que $u|_{O_{i_j}} = 0$.

Exemple 7.4. Le support de δ_a (la masse de Dirac au point a) est $\{a\}$.

7.3 Opérations élémentaires sur les distributions

On va définir dans ce paragraphe diverses opérations sur les distributions (translation, multiplication par une fonction, ...). L'idée commune aux définitions que l'on va introduire est qu'elles soient cohérentes avec celles connues pour les fonctions, puisque comme vu précédemment, l'espace $L^1_{loc}(\Omega)$ peut être assimilé à un sous-espace des distributions.

Translation Le but est ici d'étendre l'opérateur de translation $T_h f = f(\cdot + h)$ aux distributions. On veut que pour $f \in L^1_{loc}$, on ait la condition $T_h u_f = u_{T_h f}$, de sorte à avoir cohérence des définitions "fonction" et "distribution". Mais

$$\langle u_{T_h f}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+h)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x-h)dx = \langle u_f, \tau_{-h}\varphi\rangle.$$

Cela amène naturellement à la

Définition 7.5. Soit $h \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. On définiut $T_h u$ par la formule

$$\langle T_h u, \varphi\rangle = \langle u, T_{-h}\varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{7.2}$$

On vérifie facilement que $T_h u$ est aussi une distribution. On a considéré ici des distributions u sur $\mathbb{R}^n$, pour que $\langle u, T_{-h}\varphi\rangle$ soit bien défini.

Multiplication par une fonction

Définition 7.6. Soit $\psi \in C^\infty(\Omega)$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On définit la forme linéaire ψu par la formule

$$\langle \psi u, \varphi\rangle = \langle u, \psi\varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{7.3}$$

On vérifie que ψu est bien une distribution, et satisfait la condition de compatibilité : pour tout $f \in L^1_{loc}$, $\psi u_f = u_{\psi f}$.

Homothétie Le but est ici d'étendre l'opérateur de translation $H_\lambda f = f(\lambda\,\cdot)$, $\lambda \neq 0$. On veut là encore que $H_\lambda u_f = u_{H_\lambda f}$. Mais

$$\begin{aligned}\langle u_{H_\lambda f}, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x)\varphi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x')\varphi(x'/\lambda)\frac{1}{|\lambda|^n}dx = \langle u_f, \frac{1}{|\lambda|^n} H_{\frac{1}{\lambda}}\varphi\rangle\end{aligned}$$

Définition 7.7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. On définit $H_\lambda u$ par la formule

$$\langle H_\lambda u, \varphi\rangle = \langle u, \frac{1}{|\lambda|^n} H_{\frac{1}{\lambda}}\varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{7.4}$$

On vérifie que $H_\lambda u$ est bien une distribution.

Dérivée au sens des distributions Le but est ici d'étendre l'opérateur aux dérivées partielles ∂^α, avec $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. On veut que pour une fonction régulière f sur un voisinage de Ω, on ait $\partial^\alpha u_f = u_{\partial^\alpha f}$. Mais pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\langle u_{\partial^\alpha f}, \varphi\rangle &= \int_\Omega \partial^\alpha f(x)\varphi(x)dx \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)\partial^\alpha\varphi(x)dx = \langle u_f, \partial^\alpha\varphi\rangle\end{aligned}$$

où le passage de la première à la seconde ligne découle de $|\alpha|$ intégrations par parties successives. Cela incite à poser la définition suivante

Définition 7.8. Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$. On définit $\partial^\alpha u$ par la formule

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha\varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{7.5}$$

On vérifie que $\partial^\alpha u$ est bien une distribution.

Lien entre dérivée classique et dérivée au sens des distributions Lorsque f est une fonction régulière, on a la relation

$$u_{\partial^\alpha f} = \partial^\alpha u_f.$$

(la définition de la dérivée au sens des distributions découle d'ailleurs du souhait d'avoir cette relation). Par exemple, si $f \in C^1(\mathbb{R})$, on a la relation $u_{f'} = (u_f)'$. En revanche, lorsque la fonction n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}$, mais par exemple C^1 sauf en un point, la dérivée classique (définie dans cet exemple partout sauf en un point) et la dérivée au sens des distributions ne coïncident plus.

Exemple 7.5. Soit $H(x) = 1_{\mathbb{R}_+}(x)$ la fonction de Heaviside. Clairement, H est C^∞ sauf en 0, et pour tout $x \neq 0$, la dérivée classique vaut $H'(x) = 0$. Par ailleurs, H étant localement intégrable, elle peut être vue comme une distribution. Mais la dérivée au sens des distributions n'est pas nulle : on trouve

$$\langle (u_H)', \varphi \rangle = -\langle u_H, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}_+} \varphi'(x)dx = \varphi(0).$$

Ainsi, on trouve $(u_H)' = \delta_0$, la masse de Dirac.

Ce dernier exemple peut se généraliser à une fonction présentant un saut en un point. Plus précisément, on a la formule suivante

Proposition 7.5. (Formule des sauts) *Soit $a \in \mathbb{R}$, et f telle que $f|_{]-\infty,a[}$, resp. $f|_{]a,+\infty[}$ s'étend en une fonction de $C^1(]-\infty, a])$, resp. de $C^1([a, +\infty[)$. Alors :*

$$(u_f)' = u_{f'} + (f(a+) - f(a-))\delta_a$$

où f' est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ (et vue comme une fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$), et $f(a+)$, resp. $f(a-)$ désigne la limite à droite, resp. à gauche, de f en a.

Preuve. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle (u_f)', \varphi \rangle &= -\langle u_f, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx \\ &= -\int_{-\infty}^{a} f(x)\varphi'(x)dx - \int_{a}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx.\end{aligned}$$

La fonction f étant C^1 sur chacun des sous-intervalles, on peut intégrer par parties, et l'on trouve

$$\begin{aligned}\langle (u_f)', \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{a} f'(x)\varphi(x)dx - [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{a} + \int_{a}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx - [f(x)\varphi(x)]_{a}^{+\infty} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)dx \ + \ (f(a+) - f(a-))\varphi(a).\end{aligned}$$

Remarque 7.4. Dans de nombreux domaines, par exemple les EDP, la dérivée usuelle est un objet moins pertinent que la dérivée au sens des distributions. C'est pourquoi, si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la notation $\partial^\alpha f$ désigne très souvent la dérivée au sens des distributions :

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial^\alpha \varphi(x)dx.$$

Exemple 7.6. **(Valeur principale)** La fonction $f : x \to \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}_*$, ne peut pas être vue comme une fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, car elle n'est pas intégrable au voisinage de 0. Il est cependant possible de trouver une distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui la prolonge, au sens où $u|_{\mathbb{R}^*} = f$. L'idée est que la primitive $F : x \to \ln(|x|)$ de f peut être vue comme un élément de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Il est alors naturel de poser $u = F'$, où F' désigne la dérivée au sens des distributions. Concrètement, on appelle *valeur principale de* $1/x$, la distribution

$$\mathrm{VP}\big(\frac{1}{x}\big) = (\ln(|x|))' \tag{7.6}$$

où le $'$ désigne la dérivée au sens des distributions : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle \mathrm{VP}\big(\frac{1}{x}\big), \varphi\rangle = -\langle \ln(|x|), \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \ln(|x|)\varphi(x)dx.$$

On va montrer la formule suivante :

$$\langle \mathrm{VP}\big(\frac{1}{x}\big), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx. \tag{7.7}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}dx \\
&= -\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln(|x|)\,\varphi'(x)dx + [\ln(|x|)\,\varphi(x)]_{-\infty}^{-\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln(|x|)\,\varphi'(x)dx + [\ln(|x|)\,\varphi(x)]_{\varepsilon}^{+\infty} \\
&= -\int_{|x|>\varepsilon} \ln(|x|)\,\varphi'(x)dx + \ln(\varepsilon)\,(\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon))
\end{aligned}$$

Par le théorème des accroissements finis, le deuxième terme est un $O(\varepsilon\ln\varepsilon)$, et converge donc vers zéro avec ε. Il reste

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{|x|>\varepsilon} \ln(|x|)\,\varphi'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} \ln(|x|)\,\varphi'(x)dx = \langle \mathrm{VP}\big(\frac{1}{x}\big), \varphi\rangle.$$

7.4 L'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Nous renvoyons au Chapitre 6, Paragraphe 6.2, pour la définition de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On a vu que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ peut être muni d'une distance notée $d_{\mathcal{S}}$, *cf* (6.4). Cette distance fait de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ un espace métrique complet.

Définition 7.9. (Distributions tempérées) On appelle distribution tempérée une forme linéaire continue u sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. L'espace des distributions tempérées est noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, et pour tous $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on note $\langle u, \varphi\rangle$ le réel $u(\varphi)$.

La continuité est ici au sens de la distance $d_{\mathcal{S}}$: $d_{\mathcal{S}}(\varphi_n, \varphi) \to 0 \Rightarrow \langle u, \varphi_n\rangle \to \langle u, \varphi\rangle$. L'analogue de la Proposition 7.2 est

Proposition 7.6. *Une forme linéaire u sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est une distribution tempérée si et seulemnt si il existe $C > 0$, $k > 0$ tel que*

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| \leq k} (1 + |x|^2)^k |\partial^\alpha f(x)|.$$

On laisse à titre d'exercice la

Proposition 7.7. (Les distributions tempérées sont des distributions) *Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Alors $u|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$ est un élement de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. De plus, $u|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = 0 \Rightarrow u = 0$.*

Exemple 7.7. A toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, on peut associer la forme linéaire u_f définie par

$$\langle u_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

La forme linéaire u_f ainsi définie est bien dans $S'(\mathbb{R}^n)$, car

$$|\langle u_f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^{p'}} \leq \|f\|_{L^p} \|x \to (1 + |x|^2)^{-k}\|_{L^{p'}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^k |f(x)|$$

où k est choisi assez large de telle sorte que $x \to (1 + |x|^2)^{-k} \in L^{p'}$. La restriction de u_f à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ coincide avec la distribution u_f vue précédemment. En particulier, grâce à la proposition précédente et la proposition 7.3, on peut identifier f et u_f.

Exemple 7.8. De manière analogue à l'exemple précédent, si f est une fonction localement intégrable satisfaisant $|f(x)| = O(|x|^M)$ pour un $M > 0$ quand $|x| \to +\infty$, la formule

$$\langle u_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

définit un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemple 7.9. Si u est un élément de $\mathcal{D}'_c(\mathbb{R}^n)$ *(distributions à support compact)*, on peut l'étendre en une distribution tempérée par la formule

$$\langle \overline{u}, \varphi \rangle = \langle u, \chi \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

où χ est une fonction de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui vaut 1 au voisinage du support de u. Notons que le membre de droite est un crochet de dualité entre $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\chi\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, donc bien défini. On peut montrer (exercice) que ce membre de droite est indépendant du choix de χ, ce qui permet de définir le membre de gauche sans ambiguité. On vérifie que le prolongement $\overline{u}$ ainsi défini est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. En général, pour alléger les notations, on note encore u ce prolongement au lieu de $\overline{u}$.

Remarque 7.5. On peut généraliser la formule ci-dessus à des fonctions $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$: autrement dit, tout élement u de $\mathcal{D}'_c(\mathbb{R}^n)$ peut être prolongé en une forme linéaire sur $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, par la formule

$$\langle \overline{u}, \varphi \rangle = \langle u, \chi \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

De façon identique à ce qui a été fait pour les distributions "classiques", on peut définir la convergence d'une suite de distributions tempérées (convergence simple), ainsi que les translaté, l'homothétique, les dérivées partielles d'une distribution tempérée : il suffit de remplacer $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ par $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans les formules (7.2)-(7.4)-(7.5). Pour le produit ψu d'une fonction ψ par une distribution tempérée $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, la formule (7.3) ne peut être conservée que si $\psi\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Cela est vrai sous les hypothèses

$$\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{et } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \, \exists C_\alpha, M_\alpha > 0, \, |\partial^\alpha \psi(x)| \le C_\alpha |x|^{M_\alpha}.$$

L'intérêt essentiel des distributions tempérées est le fait de pouvoir définir leur transformée de Fourier. On rappelle que la transformée de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *cf* Chapitre 6. On introduit alors la définition par dualité suivante :

Définition 7.10. (Transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) Pour tout $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on définit la forme linéaire $\hat{u}$ (ou $\mathcal{F}u$) par la relation

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle.$$

Proposition 7.8. *L'application $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est un isomorphisme.*

Remarque 7.6. Par isomorphisme, on signifie ici : application linéaire continue d'inverse continu. La continuité de $\mathcal{F}$ ou de $\mathcal{F}^{-1}$, et plus généralement d'une application G de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ est à comprendre au sens des suites : G est continue si

$$\begin{aligned} & u_n \to u \quad (\text{au sens où } \langle u_n, \varphi \rangle \to \langle u, \varphi \rangle \, \forall \varphi \in \mathcal{S}) \\ \Rightarrow \; & G(u_n) \to G(u) \quad (\text{au sens où } \langle G(u_n), \varphi \rangle \to \langle G(u), \varphi \rangle \, \forall \varphi \in \mathcal{S}) \end{aligned}$$

Preuve. La linéarité et la continuité de $\mathcal{F}$ sont évidentes. Pour l'injectivité : si $\hat{u} = 0$, la définition donne : $\langle u, \hat{\varphi} \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Comme la transformée de Fourier est surjective de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on en déduit $u = 0$. Pour la surjectivité : soit $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Comme $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même, la forme linéaire u définie par

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle v, \mathcal{F}^{-1} \varphi \rangle$$

est un élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On vérifie immédiatement que $\hat{u} = v$, et que $v \to u$ est continue.

Remarque 7.7. Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ou pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Fourier de f vue comme fonction coincide avec la transformée de Fourier de f vue comme distribution : autrement dit, on a la relation $\mathcal{F} u_f = u_{\mathcal{F} f}$. En effet, par densité, il suffit de le montrer pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: or pour une telle fonction, et pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F} u_f, \varphi \rangle = \langle u_f, \mathcal{F}\varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \mathcal{F}\varphi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot y} \varphi(\xi) d\xi dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i\xi \cdot y} dy \varphi(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F} f(\xi) \varphi(\xi) d\xi = \langle u_{\mathcal{F} f}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

où on a utilisé le théorème de Fubini.

On peut facilement montrer que les propriétés classiques de la transformée de Fourier usuelle s'étendent à la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On a ainsi les formules

$$\mathcal{F}(T_h u) = e^{i\xi\cdot h}\mathcal{F}u, \quad \partial_{\xi_j}\mathcal{F}u = -i\mathcal{F}(x_j u), \quad \mathcal{F}(\partial_{x_j}u) = i\xi_j\mathcal{F}u, \dots$$

Exemple 7.10. On considère la fonction constante $f = 1$. Elle peut être vue comme une distribution tempérée (voir l'exemple 7.8). On applique la formule : pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle \hat{1}, \varphi\rangle = \langle 1, \hat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)d\xi = (2\pi)^n\varphi(0),$$

la dernière égalité venant de la formule d'inversion de Fourier

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi.$$

Notons que cette égalité, valide *a priori* pour presque tout x, est en fait valide pour tout x car les deux membres de l'égalité sont des fonctions continues de x. On peut donc, comme on l'a fait, l'appliquer en $x = 0$. Ainsi,

$$\hat{1} = (2\pi)^n\delta_0$$

"Réciproquement", on a

$$\langle \hat{\delta}_0, \varphi\rangle = \langle \delta_0, \hat{\varphi}\rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx$$

ce qui montre que $\hat{\delta}_0 = 1$.

Exercice : montrer que $\mathcal{F}(x \to x_j) = (2\pi)^n i\,\partial_{\xi_j}\delta_0$.

7.5 Convolution des distributions

7.5.1 Les cadres de dualité : $\mathcal{D}' \star \mathcal{D}$, $\mathcal{S}' \star \mathcal{S}$

Théorème 7.1. *Pour tout $(u, \varphi) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ou pour tout $(u, \varphi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, l'application $u \star \varphi$ définie par*

$$u \star \varphi(x) = \langle u, \varphi(x - \cdot)\rangle$$

est bien définie et C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\partial^\alpha(u \star \varphi) = \partial^\alpha u \star \varphi = u \star \partial^\alpha\varphi.$$

Esquisse de preuve. Il suffit de montrer que pour tout $1 \leq i \leq n$, $u \star \varphi$ est dérivable par rapport à x_i, avec

$$\partial_{x_i}(u \star \varphi) = \partial_{x_i} u \star \varphi = u \star \partial_{x_i} \varphi.$$

Le théorème s'en déduit ensuite en itérant le raisonnement. Pour montrer la dérivabilité en un point x, on regarde pour $h > 0$ et e_i le i-ème vecteur de la base canonique le taux d'accroissement

$$\frac{u \star \varphi(x + he_i) - u \star \varphi(x)}{h} = \langle u, \varphi_{h,x} \rangle, \quad \text{avec } \varphi_{h,x}(y) = \frac{\varphi(x + he_i - y) - \varphi(x - y)}{h}.$$

On montre ensuite que $\varphi_{h,x} \xrightarrow[h \to 0]{} \partial_{x_i} \varphi(x - \cdot)$, dans $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ pour un compact K assez grand si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, ou dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On en déduit que $\partial_{x_i}(u \star \varphi)(x)$ existe avec $\partial_{x_i}(u \star \varphi)(x) = u \star \partial_{x_i} \varphi(x)$. Finalement, en utilisant la relation

$$\partial_{x_j}(x \to \varphi(x - y)) = -\partial_{y_j}(y \to \varphi(x - y)),$$

on a

$$u \star \partial_{x_i} \varphi(x) = \langle u, \partial_{x_i} \varphi(x - \cdot) \rangle = -\langle u, \partial_{y_i} \varphi(x - \cdot) \rangle = \langle \partial_{y_i} u, \varphi(x - \cdot) \rangle$$

ce qui conclut la preuve.

Proposition 7.9. *Pour un couple (u, φ) comme ci-dessous*

$$\mathit{support}(u \star \varphi) \subset \overline{\mathit{support}(u) + \mathit{support}(\varphi)}.$$

Preuve. Laissée au lecteur.

Théorème 7.2. *Si $u \in \mathcal{D}'_c(\mathbb{R}^n)$ (l'ensemble des distributions à support compact), alors*

— $u \star \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ *si* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

— $u \star \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *si* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Esquisse de preuve : On sait déjà que $u \star \varphi$ est C^∞. Le premier point découle de la proposition précédente, qui montre que $u \star \varphi$ est à support compact. Pour le second point, soit K le support de u, et χ une fonction C_c^∞ qui vaut 1 au voisinage de K. La décroissance rapide de $u \star \varphi$ vient de l'inégalité suivante, *cf* Proposition 7.6 : pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$|\partial^\alpha(u \star \varphi)(x)| = |\langle \partial^\alpha u, \chi \varphi(x - \cdot) \rangle| \leq C_\alpha \sup_{y \in \mathbb{R}^d, |\beta| \leq k_\alpha} (1 + |x - y|^2)^{k_\alpha} |\partial_y^\beta(\chi(y) \varphi(x - y))|,$$

avec $C_\alpha > 0$, $k_\alpha > 0$. Grâce à la décroissance rapide de φ, on peut en effet montrer (exercice) que

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^d, |\beta| \leq k_\alpha} (1 + |x - y|^2)^{k_\alpha} |\partial_y^\beta(\chi(y) \varphi(x - y))| \leq C_m (1 + |x|^2)^{-m}, \quad \forall m.$$

7.5.2 Les cadres distributions : $\mathcal{D}' \star \mathcal{D}'_c$, $\mathcal{S}' \star \mathcal{S}'_c$

On cherche à définir la convolution d'une distribution (classique ou tempérée) avec une distribution à support compact. Pour cela, on s'appuie sur les identités formelles suivantes :

$$\begin{aligned}\int f \star g(x)h(x)dx &= \int\int f(t)g(x-t)dth(x)dx = \int f(t)\int g(x-t)h(x)dxdt \\ &= \int f(t)(g_- \star h)(t)dt, \quad g_-(t) = g(-t).\end{aligned}$$

Concrètement, on définit pour une distribution u la distribution u_- définie par

$$\langle u_-, \varphi\rangle = \langle u, \varphi_-\rangle, \quad \varphi_-(t) = \varphi(-t)$$

puis on pose la

Définition 7.11. Soit $(u, v) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}'_c(\mathbb{R}^n)$, resp. $(u, v) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}'_c(\mathbb{R}^n)$. On définit $u \star v$ par la formule

$$\langle u \star v, \varphi\rangle = \langle u, v_- \star \varphi\rangle, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \text{resp.}\ \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Notons que le membre de droite est bien défini grâce au théorème 7.2. On vérifie que l'élement $u \star v$ ainsi défini est bien dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, resp. dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. On peut également vérifier que toutes les définitions du produit de convolutions sont cohérentes entre elles.

Proposition 7.10. (lien Fourier-Convolution) *Pour tout $(u, v) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ou pour tout $(u, v) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}_c(\mathbb{R}^n)$, on a $\mathcal{F}(u \star v) = \mathcal{F}u\mathcal{F}v$.*

Remarque 7.8. On peut vérifier que si $v \in \mathcal{D}_c(\mathbb{R}^n)$, alors $\hat{v}$ est une fonction C^∞, avec, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$|\partial^\alpha \hat{v}(\xi)| \le C_\alpha(1 + |x|^2)^{k_\alpha}, \quad C_\alpha > 0, \quad k_\alpha \in \mathbb{N}.$$

En particulier, le produit $\mathcal{F}u\mathcal{F}v$ est bien défini pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{D}'_c(\mathbb{R}^n)$.

7.5.3 Application à la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP)

Ce paragraphe est inspiré de la référence [3], à laquelle nous renvoyons le lecteur pour plus de détails.

Définition 7.12. (Opérateur différentiel)

On appelle opérateur différentiel sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ une application linéaire P de $C^\infty(\Omega)$ dans lui-même de la forme

$$P\phi(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|\le N} a_\alpha(x)\partial^\alpha\phi(x), \quad x \in \Omega. \tag{7.8}$$

Exemple 7.11. (Quelques opérateurs différentiels)
i) L'opérateur de transport sur $\mathbb{R}^{1+d} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x$, de champ de vecteur $v : \Omega \to \mathbb{R}^d$:

$$P\phi = \partial_t \phi + v \cdot \nabla \phi := \partial_t \phi + \sum_{i=1}^{d} v_i \partial_{x_i} \phi$$

ii) Le Laplacien sur $\mathbb{R}^n$

$$P\phi = \Delta \phi = \sum_{i=1}^{d} \partial^2_{x_i} \phi$$

iii) Le D'Alembertien sur $\mathbb{R}^{1+d} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x$:

$$P\phi = \partial_t^2 \phi - \Delta_x \phi$$

qui apparaît dans *l'équation des ondes.*
iv) L'opérateur de la chaleur sur $\mathbb{R}^{1+d}$:

$$P\phi = \partial_t - \frac{1}{2} \Delta_x \phi$$

qui apparaît dans *l'équation de la chaleur.*
v) L'opérateur de Cauchy-Riemann sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$:

$$P\phi = \overline{\partial} \phi = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \phi = \frac{1}{2} \left(\partial_x + i \partial_y \right) \phi, \quad z = x + iy$$

qui apparaît dans la théorie des fonctions holomorphes : les éléments du noyau de P sont les fonctions holomorphes de la variable $z = x + iy$ sur Ω.

Dans la suite, on va s'intéresser aux opérateurs différentiels à coefficients constants, c'est-à-dire tels que les coefficients a_α dans (7.8) sont indépendants de x. Une notion clé pour de tels opérateurs est la notion de solution fondamentale :

Définition 7.13. (Solution fondamentale)
Soit P un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$. On appelle solution fondamentale de P une solution E dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ de l'équation

$$PE = \delta_0$$

Remarque 7.9. Une solution fondamentale n'est en générale pas unique : si E est une solution fondamentale, et $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est solution de $Pu = 0$, alors $E + u$ est encore une solution fondamentale. En particulier, si P n'a pas de terme constant, c'est-à-dire si $a_{(0,\ldots,0)} = 0$, $E + C$ est une solution fondamentale pour toute constante C.

L'intérêt des solutions fondamentales réside dans la

Proposition 7.11. (Résolution des EDP)
Soit P un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^n$ à coefficients constants, et $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ une solution fondamentale. Si f est une distribution à support compact, une solution de

$$Pu = f$$

est $u = E \star f$. Le même résultat est vrai pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. La preuve est élémentaire : on a

$$Pu = \sum a_\alpha \partial^\alpha (E \star f) = (\sum a_\alpha \partial^\alpha E) \star f = \delta_0 \star f = f.$$

Ainsi, dans le cas d'une EDP linéaire à coefficients constants, résoudre l'équation avec terme source une masse de Dirac permet de résoudre l'équation avec un terme source arbitraire, *via* convolution.

Exemple 7.12. **(Quelques solutions fondamentales classiques)**
i) Laplacien.
En dimension $n = 1$, $E(x) = \frac{1}{2}|x|$ est une solution fondamentale du Laplacien.
En dimension $n = 2$, on trouve $E(x) = \frac{1}{2\pi} ln|x|$
En dimension $n \geq 3$, on trouve $E(x) = -\frac{1}{c_n}\frac{1}{|x|^{n-2}}$, avec $c_n = (n-2)|\mathbb{S}^{n-1}|$. En particulier, en dimension 3, on a $E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$.
ii) Opérateur de la chaleur sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$:

$$E(t, x) = \frac{1_{\mathbb{R}_+^*}(t)}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$$

Ainsi, en appliquant la proposition précédente, on voit que pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, la fonction

$$u(x) = E \star f(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} f(y) dy = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|y|} f(x-y) dy$$

est solution de l'équation de Poisson $-\Delta u = f$ dans $\mathbb{R}^3$. On peut noter que dans ce cas, la solution u n'est pas seulement une distribution, mais une fonction, l'intégrale étant bien définie au sens classique pour tout x. De plus, u est de classe C^∞ car f l'est.

Dans le cas de l'équation de la chaleur, on obtient sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ une solution de

$$\partial_t u - \Delta_x u = f, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

par la formule :

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} E(t-s, x-y) f(s, y) ds dy = \int_{-\infty}^t \frac{1}{(2\pi(t-s))^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{2(t-s)}} f(s, y) ds dy.$$

On peut également résoudre des problèmes avec données initiales de la forme :

$$\partial_t u - \Delta_x u = f, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad u|_{t=0} = u_0.$$

En effet, si u est une solution du système précédent sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, la fonction

$$\overline{u}(t,x) = u(t,x) 1_{\mathbb{R}_+^*}(t)$$

satisfait au sens des distributions :

$$\partial_t \overline{u} - \Delta_x \overline{u} = f 1_{\mathbb{R}_+} + \delta_{t=0} \otimes u_0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_d$$

où la distribution $\delta_{t=0} \otimes u_0$ est définie par

$$\langle \delta_{t=0} \otimes u_0, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \varphi(0,x) dx.$$

On obtient alors (au moins formellement) que : pour tout $t > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} E(t, x-y) u_0(y) dy \; + \; \int_0^t E(t-s, x-y) f(s,y) ds dy.$$

Pour conclure ce paragraphe, nous donnons quelques indications sur la façon d'obtenir les solutions fondamentales introduites dans l'exemple précédent. Pour plus de détails, voir [3].

Calcul de la solution fondamentale du Laplacien. En dimension $n = 1$, on vérifie que $E(x) = \frac{1}{2}|x|$ est une solution fondamentale du laplacien par une simple application de la formule des sauts. En dimension $n \geq 2$, on peut procéder comme suit. La masse de Dirac étant "radiale", il est naturel de chercher E sous la forme : $E(x) = e(r)$, $r = |x|$. Par ailleurs, on a $\Delta E = 0$ en restriction à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En coordonnées sphériques, l'équation $\Delta E = 0$ s'écrit en dehors de l'origine :

$$\frac{1}{r^{n-1}} \frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{d}{dr} e \right) = 0$$

Pour $n \geq 3$, resp. $n \geq 2$, on aboutit à $E|_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}}(x) = C_0 + C_1 |x|^{2-n}$, resp. $E|_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}}(x) = C_0 + C_1 \ln |x|$. On peut toujours prendre $C_0 = 0$, les solutions fondamentales étant définies à constante près. Il est alors naturel de vérifier si cette expression peut encore être valable sur $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire si on peut avoir pour une bonne valeur de C_1 :

$$\Delta(C_1 |x|^{n-2}) = \delta, \quad \text{resp. } \Delta(C_1 \ln |x|) = \delta, \quad \text{sur } \mathbb{R}^n$$

(on peut en fait montrer que c'est nécessairement le cas, voir [3] pour plus de détails). Pour cela, dans le cas $n \geq 3$, on montre d'abord que le gradient au sens des distributions de $|x|^{2-n}$ est donné par $\nabla |x|^{2-n} = (2-n) \frac{x}{|x|^n}$. La fonction n'étant pas régulière en 0, cette propriété n'est pas directe, car le gradient au sens classique et le gradient au sens des distributions pourraient ne pas coincider : nous laissons la vérification à titre d'exercice. On trouve ensuite :

$$\begin{aligned}\langle \Delta |x|^{n-2}, \varphi\rangle &= -\langle \nabla |x|^{n-2}, \nabla\varphi\rangle = (n-2)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^{n-1}}\partial_r\varphi(x)dx \\ &= (n-2)\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{r^{n-1}}\partial_r[\varphi(r\omega)]r^{n-1}drd\sigma(\omega)\end{aligned}$$

où on a réexprimé l'intégrale à l'aide des coordonnées sphériques en dimension n (se limiter au cas $n=3$ si besoin). On trouve finalement

$$\langle \Delta |x|^{n-2}, \varphi\rangle = -(n-2)|\mathbb{S}^{n-1}|\,\varphi(0) = -(n-2)|\mathbb{S}^{n-1}|\langle \delta_0, \varphi\rangle$$

ce qui donne le résultat voulu en posant $C_1 = -\frac{1}{c_n}$. Le calcul en dimension $n=2$ est analogue.

Calcul de la solution fondamentale de l'opérateur de la chaleur. On s'appuie ici sur la transformée de Fourier des distributions, plus précisément la transformée de Fourier partielle par rapport à la variable x, définie sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ par

$$\langle \mathcal{F}_x u, \varphi\rangle = \langle u, \mathcal{F}_x\varphi\rangle, \quad \forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d).$$

On applique $\mathcal{F}_x$ à l'identité

$$\partial_t E - \frac{1}{2}\Delta_x E = \delta_{t=0}\otimes\delta_{x=0}.$$

En utilisant la relation $\mathcal{F}_x(\partial_{x_j}u) = i\xi_j\mathcal{F}_x u$, $\mathcal{F}_x\delta_{x=0} = 1$, on aboutit à

$$\partial_t\hat{E} + \frac{1}{2}|\xi|^2\hat{E} = \delta_{t=0}\otimes 1_x$$

avec $\hat{E} = \mathcal{F}_x E$. Une solution de cette équation est donnée par

$$\hat{E}(t,\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}t}1_{\mathbb{R}_+^*}(t)$$

En effet, on trouve

$$\partial_t\hat{E} + |\xi|^2\hat{E} = \partial_t(1_{t>0}\otimes 1_x) = \delta_{t=0}\otimes 1_x.$$

En prenant la transformée de Fourier inverse par rapport à la variable x, (et en exploitant la formule (6.1)), on trouve bien

$$E(t,x) = \frac{1_{\mathbb{R}_+^*}(t)}{(2\pi t)^{d/2}}e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$$

Chapitre 8

Introduction à l'analyse spectrale

Tout ce chapitre est fortement inspiré des chapitres 5 et 6 du livre de F. Hirsch et G. Lacombe [4]. On pourra se référer à ces chapitres pour toute preuve non-traitée dans ces notes.

8.1 Opérateurs sur un espace de Banach. Spectre

Dans ce paragraphe, $E, || \, ||$ désigne un espace de Banach sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On note $L(E) = L_c(E, E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E dans E. Pour alléger les notations, on gardera la notation $\| \, \|$ pour la norme associée sur les endomorphismes :

$$||T|| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Tx||}{||x||}, \quad T \in L(E).$$

On appelle souvent *opérateur sur* E un élément de $L(E)$.

Définition 8.1. (Opérateur inversible) On dit que $T \in L(E)$ est un opérateur inversible s'il est bijectif et si $T^{-1} \in L(E)$.

Remarque 8.1. Comme E est un Banach, par le théorème de l'application ouverte, T inversible équivaut à T bijectif.

Proposition 8.1. *L'ensemble des opérateurs inversibles de $L(E)$, noté $GL(E)$, est un ouvert, et $GL(E) \to GL(E), T \to T^{-1}$ est continue. Plus précisément, si $T_0 \in GL(E)$, et si $||T - T_0|| < \frac{1}{||T_0||^{-1}}$, on a*

$$T^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (I - T_0^{-1}T)^n T_0^{-1}.$$

Preuve. Soit $T_0 \in GL(E)$, $T \in L(E)$ tel que $||T - T_0|| < \frac{1}{||T_0||^{-1}}$. On écrit

$$T = T_0 - (T_0 - T) = T_0(I - T_0^{-1}(T_0 - T)) = T_0(I - (I - T_0^{-1}T))$$

Nous allons montrer que pour tout $A \in L(E)$ tel que $||A|| < 1$, on a $I - A \in GL(E)$, avec

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n.$$

Admettons temporairement ce résultat. On l'applique avec $A = T_0^{-1}(T_0 - T) = I - T_0^{-1}T$. Notons qu'on a bien $||A|| \leq ||T_0^{-1}||||T_0 - T|| < 1$. Par le résultat précédent, on trouve $I - (I - T_0^{-1}T) \in GL(E)$, avec $(I - (I - T_0^{-1}T))^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(I - T_0^{-1}T)^n$, et finalement $T \in GL(E)$ avec

$$T^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(I - T_0^{-1}T)^n T_0^{-1}$$

ce qui est bien la formule voulue. Comme T_0 est arbitraire dans $GL(E)$, cela montre que $GL(E)$ est un ouvert. De plus, l'application $T \to T^{-1}$ est continue de $GL(E)$ dans lui-même. En effet, pour tout $T_0 \in GL(E)$, on peut montrer qu'elle est continue sur l'ouvert $\{T, ||T - T_0|| < \frac{1}{2||T_0||^{-1}}\}$ car limite des sommes partielles

$$T \to \sum_{n=0}^{N}(I - T_0^{-1}T)^n T_0^{-1}$$

qui sont continues et convergent uniformément en T sur l'ouvert $\{T, ||T - T_0|| < \frac{1}{2||T_0||^{-1}}\}$: plus précisément, on a

$$||T^{-1} - \sum_{n=0}^{N}(I - T_0^{-1}T)^n T_0^{-1}|| \leq \sum_{n>N} ||I - T_0^{-1}T||^n ||T_0^{-1}|| \leq \sum_{n>N} \frac{1}{2^n}||T_0^{-1}||.$$

Reste donc à montrer le résultat temporairement admis. Par l'hypothèse $||A|| < 1$, la série $\sum ||A^n|| \leq \sum ||A||^n$ est normalement convergente dans $L(E)$, qui est un Banach. Donc $\sum A^n$ converge vers un élement B de $L(E)$. De plus,

$$(I - A)\sum_{n=0}^{N} A^n = \sum_{n=0}^{N} A^n - \sum_{n=0}^{N} A^{n+1} = I - A^{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} I$$

On trouve $(I - A)B = I$. On a de manière analogue $B(I - A) = I$.

Définition 8.2. (spectre) Soit $T \in L(E)$. On appelle valeur spectrale de T un élément $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $T - \lambda I$ est non-inversible. On appelle spectre de T, noté $\sigma(T)$, l'ensemble des valeurs spectrales. Le complémentaire de $\sigma(T)$, noté $\rho(T)$, est appelé ensemble résolvant de T. AInsi, $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $T - \lambda I$ est inversible.

On déduit facilement de la proposition précédente le

Corollaire 8.1. *L'ensemble résolvant $\rho(T)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.*

Définition 8.3. (valeur propre) Soit $T \in L(E)$. On appelle valeur propre de T un élément $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\ker(\lambda I - T) \neq \{0\}$. En particulier, toute valeur propre est un élément de $\sigma(T)$. On notera $VP(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T.

Si E de dimension finie, il est bien connu que $\sigma(T) = VP(T)$. *Cela n'est plus vrai en général si E est de dimension infinie.*

Exemple 8.1. Soit $E = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N}), u_0 = 0\}$, et $T : u \to v$ avec $v_0 = 0$, $v_n = u_{n-1}$ pour $n \geq 1$. On montre facilement que 0 n'est pas inversible (les deux premiers termes de Tu sont des zéros, donc T n'est pas surjectif) mais T est injectif : ainsi 0 est dans le spectre, mais pas une valeur propre.

Exemple 8.2. Soit $E = C^0([0,1])$, muni de la norme uniforme. On définit T par $Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$. On vérifie là encore que T n'est pas surjective, Tf s'annule en 0, mais qu'elle est injective. Ainsi, $0 \in \sigma(T) \setminus VP(T)$. On peut par ailleurs vérifier que $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$: pour tout $g \in E$, et $\lambda \neq 0$, l'équation

$$\int_0^x f - \lambda f = g$$

a une unique solution dans E. En effet, par des résultats classiques, il existe une unique fonction F solution de l'équation différentielle linéaire

$$F - \lambda F' = g, \quad F(0) = 0$$

On vérifie que $f = F'$ convient. Réciproquement, si f est une solution, on a clairement $F(x) = \int_0^x f$ solution de l'équation différentielle précédente. Elle est donc définie de manière unique, et $f = F'$ aussi.

Proposition 8.2. (rayon spectral) *On a*

$$\lim_{n\to+\infty} ||T^n||^{1/n} \to \inf_{n\in\mathbb{N}} ||T^n||^{1/n}.$$

On appelle rayon spectral de T, noté $r(T)$ cette limite. On a de plus : $r(T) \leq ||T||$, et pour tout $\lambda \in \sigma(T)$, $|\lambda| \leq r(T)$. En particulier, $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{C}$.

Esquisse de preuve. Soit $a = \inf_{n\in\mathbb{N}} ||T^n||^{1/n}$. Clairement, $a \leq \liminf_n ||T^n||^{1/n}$. Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$. Il existe un n_0 tel que $||T^{n_0}||^{1/n_0} \leq a+\varepsilon$. Pour tout n, on fait la division euclidienne de n par n_0 :

$$n = q(n)n_0 + r(n), \quad 0 \leq r(n) \leq n_0 - 1.$$

On a en particulier $\frac{q(n)}{n} \to n_0$ et $\frac{r(n)}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Comme la norme d'opérateur est sous-multiplicative, on a

$$||T^n|| = ||T^{q(n)n_0+r_n}|| \leq ||T^{n_0}||^{q(n)}||T||^{r(n)}$$

En prenant la puissance $\frac{1}{n}$ de cette inégalité, on aboutit à $\limsup_n ||T^n||^{1/n} \leq ||T^{n_0}||^{1/n_0} \leq a + \varepsilon$.

Comme $||T^n|| \leq ||T||^n$, on a clairement $r(T) \leq ||T||$. Reste à montrer que $|\lambda| > r(T) \Rightarrow \lambda \in \rho(T)$. Supposons $|\lambda| > r(T)$. Soit $r \in]r(T), |\lambda|[$. On a $r^n > ||T^n||$ pour n assez grand. On en déduit que $\sum \lambda^{-n-1} T^n$ est absolument convergente, donc convergente dans $L(E)$ Banach. On peut de plus montrer que sa somme est l'inverse de $\lambda I - T$, ce qui montre que $\lambda \in \rho(T)$. En particulier, on a $\sigma(T)$ borné. Comme de plus, $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$ est fermé, c'est un compact de $\mathbb{C}$.

Pour $\lambda \in \rho(T)$, on note $R(\lambda, T) = (\lambda I - T)^{-1}$: c'est la *résolvante de T au point λ*.

Proposition 8.3. (Equation résolvante) *Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a*

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda) R(\lambda, T) R(\mu, T) = (\lambda - \mu) R(\mu, T) R(\lambda, T).$$

De plus, l'application $\lambda \to R(\lambda, T)$ est holomorphe sur $\rho(T)$, avec $\frac{d}{d\lambda} R(\lambda, T) = -R(\lambda, T)^2$.

Nous terminons ce chapitre en affinant le lien entre rayon spectral et spectre :

Théorème 8.1. *Pour tout $T \in L(E)$, $\sigma(T) \neq \emptyset$. De plus,*

$$r(T) = \max\{|\lambda|, \quad \lambda \in \sigma(T)\}$$

Preuve. On note $R_\lambda = R(\lambda, T)$. On a vu précédemment que pour $|\lambda| > r(T)$, la série $\sum \lambda^{-n-1} T^n$ est absolument convergente, avec $R_\lambda = \sum_{n=0}^\infty \lambda^{-n-1} T^n$. On montre alors que pour tout $t > r(T)$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (te^{i\theta})^{p+1} R_{te^{i\theta}} d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (te^{i\theta})^{p+1} \sum_{n=0}^{\infty} (te^{i\theta})^{-n-1} T^n d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int_0^{2\pi} (te^{i\theta})^{p-n} \Big) d\theta T^n = T^p.
\end{aligned}$$

Notons que l'interversion de la somme et de l'intégrale est justifiée, car la convergence de la série est uniforme en θ. Pour les gens familiers avec l'analyse complexe, la formule

$$T^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (te^{i\theta})^{p+1} R_{te^{i\theta}} d\theta$$

est à rapprocher de la formule de Cauchy

$$z^p = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,t)} \frac{\lambda^p}{\lambda - z} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(te^{i\theta})^{p+1}}{te^{i\theta} - z} d\theta$$

où $C(0, t)$ est le cercle de centre 0 et de rayon t.

Montrons d'abord que le spectre est non-vide. Pour $p = 0$, la formule précédente donne

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} te^{i\theta} R_{te^{i\theta}} d\theta, \quad t > r(T).$$

Introduisons $J(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} te^{i\theta}R_{te^{i\theta}}d\theta$. Si $\sigma(T) = \emptyset$, alors J est définie sur $\mathbb{R}_+$. De plus, comme $\lambda \to R_\lambda$ est holomorphe, ce qui implique $t \to R_{te^{i\theta}}$ est dérivable, le théorème de dérivation sous l'intégrale montre que J est C^1 sur $\mathbb{R}_+$, avec

$$J't) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t}\big(te^{i\theta}R_{te^{i\theta}}\big)d\theta.$$

On a pour tout $t > 0$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(te^{i\theta}R_{te^{i\theta}}\big) = e^{i\theta}\frac{d}{d\lambda}(\lambda R_\lambda)|_{\lambda=te^{i\theta}} = \frac{1}{it}ite^{i\theta}\frac{d}{d\lambda}(\lambda R_\lambda)|_{\lambda=te^{i\theta}} = \frac{1}{it}\frac{\partial}{\partial\theta}\big(te^{i\theta}R_{te^{i\theta}}\big)$$

On a donc pour tout $t > 0$,

$$J't) = \frac{1}{2\pi it}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\theta}\big(te^{i\theta}R_{te^{i\theta}}\big)d\theta = 0.$$

Ainsi, J est constante sur $\mathbb{R}_+$, ce qui est impossible, car $J(0) = 0$ et $J(t) = I$ pour $t > r(T)$.

Soit $\rho = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\}$. On sait que $\rho \leq r(T)$. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (te^{i\theta})^{n+1}R_{te^{i\theta}}d\theta$$

On a vu que pour $t > r(T)$, $J_n(t) = T^n$. De plus, pour $t > \rho$, J_n est de classe C^1, avec $J_n'(t) = 0$ (même calcul que pour J_0). On en déduit que $J_n(t) = T^n$ pour tout $t > \rho$. Mais alors pour tout $t > \rho$,

$$\begin{aligned} ||T^n|| = ||\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(te^{i\theta})^{n+1}R_{te^{i\theta}}d\theta|| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}||(te^{i\theta})^{n+1}R_{te^{i\theta}}||d\theta \\ \leq t^{n+1}M_\rho, \quad \text{avec } M_\rho = \sup_{|\lambda|=t}||R_\lambda|| \end{aligned}$$

En prenant la puissance $1/n$, et en faisant tendre n vers l'infini, on aboutit à $r(T) \leq t$ pour tout $t > \rho$, d'où $r(T) \leq \rho$.

8.2 Opérateurs compacts

Dans ce paragraphe, E, F désignent deux evn sur $\mathbb{C}$, pas nécessairement complets. Pour alléger les notations, $||\,||$ désignera à la fois la norme sur E, la norme sur F et la norme sur $L_c(E,F)$. On notera également B_E, resp. $\overline{B}_E$, la boule unité ouverte, resp. fermée, de E.

Définition 8.4. On appelle opérateur compact de E dans F tout opérateur $T \in L_c(E,F)$ tel que $T(\overline{B}_E)$ est relativement compact dans F (c'est-à-dire que son adhérence est compacte). On note $K(E,F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F.

Remarque 8.2. Si T est compact et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans E, alors $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.

Exemple 8.3. Si F de dimension finie, tout $T \in L_c(E,F)$ est un opérateur compact : en effet, $T(\overline{B}_E)$ est borné, donc son adhérence est fermée bornée, c'est-à-dire compacte dans F de dimension finie.

Exemple 8.4. On dit que $T \in L_c(E,F)$ est un opérateur de *rang fini* si ImT est de dimension finie. Un opérateur de rang fini est compact : en effet, $T(\overline{B}_E)$ est un borné de ImT, donc son adhérence est fermée bornée dans $\overline{ImT} = ImT$ (un sev de dimension finie est fermé), donc compacte.

Exemple 8.5. Le théorème de Riesz affirme qu'un evn E est de dimension finie ssi la boule unité fermée de E est compacte. Un énoncé équivalent est : E est de dimension finie ssi l'opérateur identité de E est un opérateur compact.

Proposition 8.4. *Soit X, Y deux métriques compacts, μ une mesure finie sur Y, et $K \in C(X,Y)$. Soit $E = C(Y)$, $F = C(X)$. Pour tout $f \in E$, on définit $Tf \in F$ par la formule*

$$Tf(x) = \int_{X\times Y} K(x,y)f(y)d\mu(y).$$

Preuve. On va utiliser le théorème d'Ascoli. Pour montrer que $T(\overline{B}_E)$ est relativement compact dans F, il suffit de montrer que

i) Pour tout $x \in X$, $\{Tf(x), f \in \overline{B}_E\}$ est relativement compact dans $\mathbb{C}$.

ii) La famille $\{Tf,\ f \in \overline{B}_E\}$ est équicontinue.

Pour le point i), il suffit de montrer que pour tout $x \in X$, $\{Tf(x), f \in \overline{B}_E\}$ est borné : or pour tout $f \in \overline{B}_E$,

$$|Tf(x)| \leq |\int_{X\times Y} K(x,y)f(y)d\mu(y)| \leq ||K||_{L^\infty(X\times Y)}||f||_{L^\infty(Y)}\, \mu(Y) \leq ||K||_{L^\infty(X\times Y)}\, \mu(Y)$$

Pour le point ii) : soit $x \in X$, $\varepsilon > 0$. On utilise que K est continue donc uniformément continue sur le compact $X \times Y$. donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, x' \in X$, pour tout $y \in Y$, $|x - x'| \leq \eta \Rightarrow |K(x,y) - K(x',y)| \leq \varepsilon$. D'où, pour tout $f \in \overline{B}_E$,

$$\begin{aligned}|Tf(x) - Tf(x')| &= \Big|\int_{X\times Y}(K(x,y) - K(x',y))f(y)d\mu(y)\Big| \\ &\leq \int_{X\times Y} |K(x,y) - K(x',y)|\,|f(y)|d\mu(y) \leq \varepsilon||f||_{L^\infty(Y)}\mu(Y) \leq \varepsilon\mu(Y).\end{aligned}$$

Exemple 8.6. Soit $a < b$, $K \in C([a,b]^2)$. Soit α, β des fonctions continues de $[a,b]$ dans $[a,b]$. En utilisant le théorème d'Ascoli comme dans la proposition précédente, on peut montrer que l'opérateur T défini par

$$Tf(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,y)f(y)dy$$

est un opérateur compact de $C([a,b])$ dans lui-même.

En particulier, la primitivation : $Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$ est un opérateur compact de $C([0,1])$ dans lui-même.

Proposition 8.5. *L'ensemble $K(E,F)$ forme un sous-espace vectoriel de $L_c(E,F)$.*

Preuve. Il est clair que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $T \in K(E,F)$, $\lambda T \in K(E,F)$. Soient maintenant $T_1, T_2 \in K(E,F)$. Alors

$$(T_1 + T_2)(\overline{B}_E) \subset T_1(\overline{B}_E) + T_2(\overline{B}_E) \subset \overline{T_1(\overline{B}_E)} + \overline{T_2(\overline{B}_E)}$$

L'ensemble à droite est compact comme somme de deux compacts, ce qui implique que $(T_1 + T_2)(\overline{B}_E)$ est relativement compact, et donc que $T_1 + T_2 \in K(E,F)$.

Proposition 8.6. *Soit E_1, F_1 deux evn, $T_1 \in L_c(E_1, E)$ et $T_2 \in L_c(F, F_1)$. Si $T \in K(E,F)$, $T_2 T T_1 \in K(E_1, F_1)$.*

Preuve. On a $T_1(\overline{B}_{E_1}) \subset ||T_1||\overline{B}_E$, et finalement

$$T_2 T T_1(\overline{B}_{E_1}) \subset T_2(K), \quad \text{avec } K = ||T_1||\overline{T(\overline{B}_E)}.$$

$T_2(K)$ est compact comme image du compact K par T_2 continu. On a ainsi $T_2 T T_1(\overline{B}_{E_1})$ relativement compact, ce qui montre que $T_2 T T_1 \in K(E_1, F_1)$.

Proposition 8.7. *Si F est complet, $K(E,F)$ est un sev fermé de $L_c(E,F)$.*

Preuve. On rappelle (voir [4, Théorème 3.3, p13]) que dans un espace métrique complet F,une partie A de F est relativement compacte si et seulement si elle est précompacte, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_1, \ldots, x_N$ dans A tels que $A \subset \cup_{i=1}^N B(x_i, \varepsilon)$.

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $K(E,F)$ qui converge vers T dans $L_c(E,F)$. A-t-on $T(\overline{B}_E)$ relativement compact ? Comme F est complet, il suffit de montrer que $A = T(\overline{B}_E)$ est précompact. Soit $\varepsilon > 0$, et $n \in \mathbb{N}$ tel que $||T - T_n|| < \frac{\varepsilon}{3}$. On peut recouvrir $T_n(\overline{B}_E)$ par un nombre fini de boules $B(T_n f_i, \frac{\varepsilon}{3})$, $1 \le i \le N$, avec $f_i \in \overline{B}_E$. Soit $f \in \overline{B}_E$, et i tel que $||T_n f - T_n f_i|| < \frac{\varepsilon}{3}$. Par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} ||Tf - Tf_i|| &\le ||Tf - T_n f|| + ||T_n f - T_n f_i|| + ||T_n f_i - T f_i|| \\ &\le ||T - T_n||\,||f|| + ||T_n f - T_n f_i|| + ||T - T_n||\,||f_i|| \le \varepsilon. \end{aligned}$$

Cela conclut la preuve de la proposition.

Corollaire 8.2. *Si F complet, la limite d'opérateurs de rang fini est un opérateur compact.*

Exemple 8.7. **(opérateurs de Hilbert Schmidt)**
Soit H un Hilbert séparable, soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. $T \in L(H)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt si $\sum_n ||Te_n||^2$ est convergente. On peut montrer que cette définition est indépendante du choix de la base hilbertienne. Soit P_n le projecteur orthogonal sur vect$(e_1, \ldots, e_n)$. On démontre alors que $T_n = TP_n$ converge vers T dans $L(H)$, ce qui montre que T est un opérateur compact.

Nous allons conclure ce paragraphe en présentant quelques propriétés spectrales des opérateurs $T \in K(E) = K(E,E)$. On ne suppose pas nécessairement ici que E est un Banach, mais utilisons néanmoins les notions vues au début du paragraphe précédent : opérateur inversible, valeur spectrale, spectre, valeur propre, ...

Le premier résultat dans cette direction est la

Proposition 8.8. *Soit $T \in K(E)$. Alors*

i) $\ker(I-T)$ *est de dimension finie.*

ii) $Im(I-T)$ *est fermé.*

iii) *L'opérateur $I-T$ est inversible dans $L(E)$ si et seulement si il est injectif.*

Preuve.
i) Soit $B = \overline{B}_E \cap \ker(I-T)$ la boule unité fermée de $\ker(I-T)$. On a $B \subset T(\overline{B}_E)$, donc B est relativement compacte dans E, et finalement compacte car fermée dans E. Par le théorème de Riesz, $\ker(I-T)$ est de dimension finie, car sa boule unité fermée est compacte.

ii) Soit $y_n = x_n - Tx_n \xrightarrow{n\to\infty} y$. On veut montrer que $y \in ImT$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée,$(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente, mais alors $x_n = y_n + Tx_n$ admet une sous-suite convergente. En appelant x sa limite et en utilisant la continuité de T, on obtient $y = x - Tx$.

Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, on considère $d_n = dist(x_n, \ker(I-T))$. Comme $\ker(I-T)$ est de dimension finie, il existe un point z_n tel que $||x_n - z_n|| = d_n$. Si la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on peut remplacer x_n par $x_n - z_n$, et appliquer la première partie du raisonnement. Si la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, quitte à extraire, on peut supposer $d_n \to +\infty$. La suite $\left(\frac{x_n - z_n}{d_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $T(\frac{x_n-z_n}{d_n})$ admet une sous-suite qui converge vers un point $u \in E$. On en déduit que

$$\lim_n \frac{x_n - z_n}{d_n} = u + \lim_n \frac{x_n - Tx_n}{d_n} = u + \lim_n \frac{y}{d_n} = 0.$$

On a en particulier, $u = T(u)$, et $x_n - z_n - d_n u = o(d_n)$. Ainsi, pour n assez grand, $||x_n - z_n - d_n u|| < d_n$ ce qui contredit la définition de d_n. Ainsi, la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, ce qui achève la preuve de ii).

iii) On suppose que $I-T$ est injectif. Pour démontrer sa surjectivité, on s'appuie sur le

Lemme 8.1. *Si F est un sev fermé strict d'un evn G, alors il existe $u \in G$ tel que $||u|| = 1$ et $d(u,F) \geq \frac{1}{2}$.*

Preuve du lemme. Soit $v \in G \setminus F$, et $\delta = dist(v,F) > 0$. Soit $w \in F$ tel que $||v-w|| < 2\delta$. Le point $u = \frac{v-w}{||v-w||}$ convient, car pour tout $z \in F$,

$$||u-z|| = \frac{1}{||v-w||}||v - w - ||v-w||z|| \geq \frac{1}{2\delta}\delta = \frac{1}{2}.$$

Pour conclure la preuve de la proposition, on raisonne par l'absurde. Supposons que $E_1 = Im(I-T)$ est distinct de $E_0 = E$. Plus généralement , on pose $E_n = Im(I-T)^n$. On va démontrer par récurrence que E_n est fermé, $E_n \subset E_{n-1}$, $E_n \neq E_{n+1}$. La propriété est vraie au rang $n = 1$. Supposons la vérifiée au rang n. Pour $y = (I-T)^n x \in E_n$, $Ty = y - (I-T)^{n+1} y \in E_n$. T peut être vu comme un opérateur de $L(E_n)$. On a en particulier $T(\overline{B}_{E_n}) \subset T(\overline{B}_E) \cap E_n$ qui est relativement compact dans E_n, car E_n est fermé. On en déduit que T est un opérateur compact de E_n. Mais $E_{n+1} = (I-T)(E_n)$ est alors fermé par le point ii) de la proposition. Clairement, $E_{n+2} \subset E_{n+1}$. Par ailleurs, puisque $I - T$ est injectif par hypothèse,

$$E_n \neq E_{n+1} \ \Rightarrow E_{n+1} = (I-T)(E_n) \neq (I-T)(E_{n+1}) = E_{n+2}.$$

En utilisant le lemme, pour tout n, il existe $u_n \in E_n$ tel que $||u_n|| = 1$ et $dist(u_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$. Mais pour $m > n$,

$$Tu_n - Tu_m = u_n - v_{n,m}, \qquad \text{avec } \ v_{n,m} = Tu_m + (I-T)u_n \in E_{n+1}.$$

D'où $||Tu_n - Tu_m|| \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \neq m$, ce qui contredit le fait que $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. On a ainsi prouvé la bijectivité de $(I-T)$.

Reste à montrer que $(I-T)^{-1}$ est continu (ce qui est automatique par le théorème de l'application ouverte quand E est un Banach). On raisonne par l'absurde : on suppose qu'il existe x_n ne tendant pas vers zéro tel que $x_n - Tx_n \to 0$ (ce qui nie la continuité de $(I-T)^{-1}$ en 0). Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer $||x_n|| \geq \delta$ pour un $\delta > 0$ indépendant de n. Soit $u_n = \frac{x_n}{||x_n||}$. Quitte à réextraire, on peut supposer que Tu_n converge vers un certain u, mais comme $||u_n - Tu_n|| \leq \frac{1}{\delta}||x_n - Tx_n||$, on a alors également convergence de u_n, avec $u = Tu$. Cela implique $u = 0$, ce qui contredit $||u|| = \lim_n ||u_n|| = 1$.

Théorème 8.2. *Soit T un opérateur compact de E dans E.*

- **i)** *Si E est de dimension infinie, 0 est une valeur spectrale de T.*
- **ii)** *Toute valeur spectrale non-nulle de T est valeur propre de T et son sous-espace propre associé est de dimension finie.*
- **iii)** *Le spectre de T est fini ou dénombrable. S'il est dénombrable, on peut ranger ses éléments en une suite λ_n telle que*

$$\forall n, \quad |\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n|, \qquad et \quad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0.$$

Preuve.

i) Supposons que 0 n'est pas valeur spectrale de T. Alors $I = TT^{-1}$ est compact par la Proposition 8.6. On en déduit que E est de dimension finie (voir l'exemple 8.5).

ii) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Si λ valeur spectrale de T, alors $\lambda I - T$ non-inversible, ou encore $I - T'$ est non-inversible, avec $T' = \frac{T}{\lambda}$ compact. Par le point iii) de la proposition précédente, on en déduit que $I - T'$ est non-injective, ou encore $\lambda I - T$ non-injective : λ est donc une valeur propre de T. De plus, $\ker(\lambda I - T) = \ker(I - T')$ est de dimension finie, par le point i) de la proposition

iii) Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de valeurs spectrales λ telles que $|\lambda| \geq \varepsilon$. Par le point ii), il s'agit de valeurs propres. Par l'absurde : supposons qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de valeurs propres distinctes telles que $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ pour tout n. Soit e_n vecteur propre unitaire associé à λ_n. On a facilement que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une famille libre. Alors $E_n = \text{vect}(e_0, \ldots, e_n)$ est une suite strictement croissante d'espaces vectoriels de dimension finie. Par le lemme vu plus haut, il existe $u_n \in E_{n+1}$ tel que $||u_n|| = 1$ et $dist(u_n, E_n) \geq \frac{1}{2}$. Soit $v_n = \frac{u_n}{\lambda_{n+1}}$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $\frac{1}{\varepsilon}$. Par ailleurs, pour $m < n$,

$$||Tv_n - Tv_m|| = ||u_n - v_{n,m}|| \quad \text{avec } v_{n,m} = Tv_m + \frac{1}{\lambda_{n+1}}(\lambda_{n+1}I - T)u_n$$

Or $Tv_m \in E_{m+1} \subset E_n$ et $\frac{1}{\lambda_{n+1}}(\lambda_{n+1}I - T)u_n \in E_n$, d'où $||Tv_n - Tv_m|| \geq \frac{1}{2}$, ce qui contredit le fait que $(Tv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.

Bibliographie

[1] B. Beauzamy. Introduction to Banach Spaces and their Geometry. North-Holland 1983.

[2] H. Brezis. Analyse fonctionnelle - Théorie et Applications. Collection *Sciences Sup*, Dunod, 2005.

[3] F. Golse. Distribution, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles. Cours de l'Ecole Polytechnique, disponible sur https ://www.cmls.polytechnique.fr/perso/golse/cours.html.

[4] F. Hirsch, G. Lacombe. Elements d'analyse fonctionnelle. Collection *2ème cycle, agrégation*, Dunod, 1997.

[5] W. Rudin. Analyse réelle et complexe. Collection *Master, Agrégation*, Dunod, 2009.

[6] C. Zuily. Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles. Collection *Sciences Sup*, Dunod, 2002.